GIOVANNI ANTONIO MAGGI

PROFESSORE ORDINARIO DELLA R. UNIVERSITÀ DI PISA

DINAMICA FISICA

Lezioni sulle Leggi Generali del Movimento dei Corpi Naturali

Con un'Appendice sul Calcolo del Movimento il Calcolo Vettoriale e la Cinematica

In mathesi investigandae sunt virium quantitates et rationes illae, quae ex conditionibus quibuscumque positis consequentur: deinde, ubi in physicam descenditur, conferendae sunt hae rationes cum phaenomenis; ut innotescat quaenam virium conditiones singulis corporum attractivorum generibus competant. Et tum demum de virium speciebus, causis et rationibus physicis tutius disputare licebit. (Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Lib. I, Sect. XI, Scholium).

PISA

ENRICO SPOERRI

LIBRAIO-EDITORE

1912

PREFAZIONE

Queste Lezioni formano quella parte del mio Corso di Meccanica Razionale, dove stabilisco e discuto i concetti fondamentali della Dinamica: ne sviluppo le più ampie conseguenze, donde risultano le leggi generali del movimento dei corpi naturali: e infine, per illustrare gli esposti principii, e mostrarne l'efficacia, ne faccio l'applicazione al calcolo dei movimenti per effetto della gravitazione. Parte, che può formar corpo da sè. Perchè la precedono la " Statica ", trattata con principi proprii, salvo ritornare sull'equilibrio, considerato come forma particolare del movimento, e la " Cinematica ". La segue, e chiude il Corso, una quarta parte, che intitolo " Calcolo del Movimento dei Corpi Naturali ", ch'io tengo a serbare distinta, come quella in cui introduco, in tutta la sua estensione, il concetto dei vincoli, ed altri artifizii, che si collegano con esso; ed espongo il procedimento generale, fondato su quei concetti, che serve per tradurre in equazioni, trattabili coll'analisi, le varie classi di problemi di movimento dei corpi naturali [1]).

[1]) Già introdussi questa divisione della Dinamica nel mio trattato « *Teoria matematica del movimento dei corpi* » (Milano, Hoepli, 1896). Al Calcolo del Movimento, nell'ipotesi di un sistema composto di corpi rigidi, è dedicato il mio più recente libro « *Lezioni di Stereodinamica* » (Milano, Hoepli, 1903).

Intitolo questa parte " Dinamica Fisica ", perchè è il capitolo della Meccanica Razionale, che sta in particolari rapporti colla Fisica, coll'attingere dall'esperienza i postulati fondamentali, per fornire, in ricambio, una espressione matematica delle principali modalità comuni dei movimenti fisici: come pure, col valersi nella più stretta misura di circostanze matematiche approssimative, ammesse a priori — *per esempio, la continuità delle figure, la regolarità, in genere, della dipendenza delle variabili dal tempo e dallo spazio — cioè nella misura indispensabile, per creare il " corpo naturale " della teoria matematica. Il quale non può essere altrimenti che un modello del corpo concreto, contemplato dall'esperienza, in quanto ne riproduce quel tanto di proprietà, che appartiene al cómpito, convenientemente circoscritto, della medesima teoria.*

E perciò gioverà rammentare che compito della teoria matematica d'ogni specie di fenomeni naturali reputiamo stabilire alcuni postulati, col significato di ipotesi, traducenti, più o meno integralmente, secondo limiti prefissati, fatti sperimentali; per dedurne, col ragionamento e col calcolo, conseguenze logiche, interpretabili, alla lor volta, come fatti sperimentali; e, così, in primo luogo, fornire una spiegazione di questi fatti, riconducendone l'origine ai precedenti, e, in secondo luogo, illuminare l'esperienza, nella definizione delle sue conclusioni, e guidarla alla scoperta di fatti nuovi.

Faccio uso, per quanto conviene, del Calcolo Vettoriale. Oltre prestare il vantaggio di più spedite operazioni, e di più concise formole, esso possiede, in questo ordine di questioni, un vero valore intrinseco. Poichè conferisce il significato di formazioni, corrispondenti alla somma e al prodotto dell'aritmetica, a combi-

nazioni di quantità, che appariscono altrimenti affatto artifiziose e sembrano riprodursi, in casi disparati, per semplice accidente. Non adopero tuttavia che le nozioni più elementari. E di codeste per maggior comodità di chi legge, dò, in una breve Appendice, alla fine del libro, la definizione, colla spiegazione dei simboli, e l'indicazione delle principali proprietà.

Presuppongo le ordinarie cognizioni di Cinematica. Ma, col precedente scopo, dò pure, nell'Appendice, alcune notizie attinenti a questa parte preliminare della Meccanica: specialmente, in connessione colle premesse nozioni di Calcolo Vettoriale, e a proposito di qualche espressione non comunemente usata. Infine, a complemento del libro, che, secondo l'accennata divisione del mio corso di Meccanica Razionale, non s'inoltra, al di là dei movimenti per effetto di gravitazione, nel dominio del Calcolo del Movimento, dedico il primo articolo della Appendice suddetta ad una succinta esposizione dei concetti che servono di fondamento a codesta parte, di carattere distinto, nei limiti che occorrono per mostrare la sua connessione col resto.

Sarò pago, se conseguirò l'intento di giovare al profitto, e agevolare il lavoro de' miei buoni studenti.

Il mio disegno è, d'altronde, ben modesto, in confronto degli ardimenti della critica moderna, che, da un lato sembra rimettere in campo la controversia fra i Massimi Sistemi, e, dall'altro, giunge al saggio di principii nuovi, che costituiscono il comune fondamento della Meccanica e dell'Elettromagnetismo. Questi saggi, per verità, attendono ancora la prova di reggere così ponderoso edifizio. Per quanto poi concerne il significato delle dottrine meccaniche, rispetto al conseguimento del vero, le poche righe precedenti, sul modo che dobbiamo intendere il compito delle teorie

matematiche dei fenomeni fisici, dichiarano a sufficienza come io convenga nel concetto che quelle dottrine non ci possono rivelare che verità relative. Chè la qualità di verità assolute non compete, in primo luogo, alle ipotesi fondamentali. E sta quindi il fatto che, senza offendere la Logica, si possono variare e codeste e le corrispondenti deduzioni. Se non che neppur mi sembra che possa essere oggetto di efficace discussione la preferenza dovuta ad una teoria che, col minor numero e la minore artificiosità delle ipotesi, renda ragione del maggior numero e della maggior varietà di fatti: poichè, in mancanza della verità assoluta, non saprei quale più sano criterio potrebbe illuminare la scelta. Nè è punto escluso che ulteriori progressi dell' indagine scientifica reclamino una riforma della presente Dottrina Meccanica. Ad ogni modo, i suoi cospicui risultati le assicurano, per l'avvenire, non meno che al presente, un posto incontrastabile nel dominio della Conoscenza.

Ma non è nemmeno facile con un libro di Meccanica Razionale, dedicato alla Scuola, soddisfare le presenti esigenze, fra le diverse opinioni sui limiti e sull' indole di codesto insegnamento, che tendono, si direbbe, a provocarne una geminazione, per impartire, a seconda del caso, una Meccanica Razionale, che si libri, a sua posta, nei campi della Matematica, oppure un' altra, che scorra, col minimo attrito possibile, sulle guide tracciate dall' interesse professionale. Con quel concetto non potrei affatto consentire. La prima corre il rischio di non serbar più di Meccanica altro che il nome. Per quanto alla seconda, è un esperimento d'assai dubbio successo, se Euclide ha ragione di rispondere a Tolomeo che strada regia, nella Matematica, non c' è.

Pisa, giugno 1911.

GIAN ANTONIO MAGGI.

Capitolo Primo

Concetti fondamentali

Determinazione concreta della posizione assoluta e del tempo.

§ 1. — " Posizione assoluta „ di un punto dello spazio chiamiamo la posizione del punto riferita a quella terna d'assi, formata coll'ajuto delle stelle fisse, di cui si vale la Cosmografia, per descrivere i movimenti proprii dei corpi celesti. È noto che molteplici movimenti degli astri, quali appariscono all'osservatore sulla sfera celeste, si prestano ad essere spiegati come apparenza, risultante da un movimento dell'osservatore, concepito invariabilmente congiunto col globo terrestre, rispetto ad una certa terna d'assi. Si procura, nel suddetto modo, di fissare questa terna, rispetto alla quale tali movimenti degli astri riescono eliminati.

§ 2. — Il " tempo „ ai cui successivi valori si coordina la successione delle posizioni di un punto mobile, per definirne il movimento, s'intende proporzionale all'angolo di cui attualmente gira la sfera celeste, conformemente al così detto movimento diurno, fra una posizione stabilita e la posizione corrispondente ad ogni posizione del punto mobile, tenendo calcolo, naturalmente, dei giri completi. Con che, assumendo $24 \times 60 \times 60$ come misura dell'intervallo di tempo competente a due successivi passaggi del sole medio pel meridiano di uno stesso punto della terra, l'unità di tempo riesce il minuto secondo di tempo solare medio: e il

tempo, conformemente alla premessa definizione, risulta praticamente quello che è indicato dall'orologio, supposto, per quant'è possibile, esatto.

§ 3. — *Osservazione.* Per interesse che possano avere le questioni della posizione assoluta di un punto dello spazio e del tempo sotto un aspetto generale, la precedente determinazione concreta è sufficiente, per fissarne il significato che vi si attribuisce nella Meccanica. Poichè, in quanto codesta ha rapporto coll'esperienza, o per trarne i proprii postulati, o per invocarla a controllo delle proprie deduzioni, o per fornire la spiegazione e la previsione di fenomeni naturali, adopera la posizione assoluta dei mobili e il tempo, quali risultano dalla indicata determinazione concreta, e non altrimenti. Per esempio, quando si dice che il movimento assoluto di un pianeta, entro assegnati limiti d'approssimazione, è il movimento kepleriano, composto con un certo movimento traslatorio, rettilineo, uniforme, appartenente al complesso del sistema solare, s'intende puramente che tali riescono le circostanze del movimento del pianeta, fra quei limiti d'approssimazione, riferendone le posizioni ad una terna d'assi fissi, stabilita col precedente significato, e coordinando queste posizioni al tempo, inteso, alla sua volta, col precedente significato. E le conseguenze, d'indole generale, che la Meccanica deduce dalla considerazione di tali movimenti, come la legge newtoniana della mutua azione intrinseca di due elementi, implicano, sotto il doppio aspetto della loro origine e delle applicazioni a cui sono destinate, quei significati della posizione rispetto ad assi fissi e del tempo.

La teoria cinematica del movimento relativo [1]) fornisce la relazione esistente fra posizione, velocità, accelerazione, riferite alla terna suddetta, e le stesse circostanze, riferite invece ad una

[1]) Per questa ed altre nozioni di Cinematica cfr. la terza parte dell'Appendice.

terna d'assi, che possiede rispetto ad essa un movimento dato. Giova rilevare come l'accelerazione riesca invariata, riferendosi ad una terna d'assi in movimento, rispetto alla prima, traslatorio, rettilineo, uniforme. Per modo che le proposizioni che implicano la sola accelerazione — e tali, vedremo, sono le leggi fondamentali della Dinamica — si possono intendere stabilite, riferendo il movimento ad una terna d'assi, coll'origine nel centro del sole, e le direzioni delle visuali a tre fra le più lontane stelle fisse. Questo infatti torna prescindere dal ricordato movimento traslatorio rettilineo uniforme del sistema solare, rispetto ai convenuti assi di riferimento assoluto. E si riconosce ancora come, con certi gradi d'approssimazione, da accrescere di mano in mano, altri risultati si potranno sensibilmente riferire ad una terna d'assi come i precedenti, ma coll'origine nel centro del globo terrestre, od anche invariabilmente uniti allo stesso globo.

Queste osservazioni, e la precedente riduzione della determinazione del tempo alle indicazioni dell'orologio, potranno chiarire il significato pratico delle convenzioni in discorso. In quanto al loro valore, per la costruzione della teoria matematica del movimento dei corpi naturali, è riserbato allo svolgimento della stessa teoria dimostrare come essa ne riesca tale da soddisfare ampiamente il proprio scopo. Il quale scopo, giova tener presente, intendiamo sia quello di fornire, per mezzo di un'opportuna immagine del mondo fisico, una coordinazione dei molteplici e svariati fenomeni attinenti al movimento dei corpi, rilevati dall'esperienza, e una guida all'esperienza, per le varie applicazioni di quei fenomeni, e la scoperta di nuovi risultati [1]).

---

[1]) Per un interessante ed istruttivo riassunto della questione attinente ai concetti di spazio e di tempo, in rapporto colla Meccanica Razionale, rimandiamo il lettore all'articolo di A. Voss « *Die Prinzipien der Rationellen Mechanik* » nella *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*. Band. IV_1. (Leipzig, Teubner, 1901). Cf. p. 219.

Figura materiale.

§ 4. — *Definizione.* " Figura materiale „ chiamiamo un mobile in movimento regolare (rappresentato quindi, in particolare, da una figura continua) al quale conferiamo alcuni attributi, che passiamo a indicare.

§ 5. — *Attributo 1.º* La figura materiale possiede una individualità, per la quale infiniti movimenti diversi possono essere attribuiti alla stessa figura materiale. Esiste un'infinità di figure materiali, distinte per la suddetta individualità. Ogni figura materiale si può supporre isolata con una o più altre.

§ 6. — *Definizione.* " Accelerazione „ di una figura materiale ad un istante chiamiamo il valor medio delle accelerazioni de' suoi punti allo stesso istante.

Indicando con τ il volume del campo rappresentato dalla figura materiale al considerato istante, od anche il campo medesimo: con P il punto generico di questo campo: con $\mathbf{A}_P$ [1]) e con $\mathbf{A}$ l'accelerazione, al considerato istante, del punto P e della figura materiale, la precedente definizione si traduce in

$$\mathbf{A} = \frac{\int_\tau \mathbf{A}_P \, d\tau}{\tau}. \tag{1}$$

§ 7. — *Attributo 2.º*

a) Le accelerazioni, ad uno stesso istante, di due figure materiali isolate l'una coll'altra sono o ambedue nulle, o possie-

---

[1]) Le lettere in tipo grassetto rappresentano vettori. Pel significato dell'integrale contenuto in (1), e d'ogni altro simbolo, che sarà adoperato in seguito, attinente al Calcolo Vettoriale, cfr. la seconda parte dell'Appendice.

dono orientazioni parallele e di senso opposto, e grandezze il cui rapporto è invariabile col tempo e colla specie del movimento delle due figure, dipendendo puramente dalla coppia di figure materiali da esse definita.

b) L'accelerazione d'una figura materiale isolata con un'altra è determinata dalla posizione della figura considerata rispetto all'altra, al supposto istante, e può variare in infiniti modi, mutando la posizione relativa dell'altra figura, e questa stessa figura.

§ 8. — *Attributo 3.°* Il quoziente dei rapporti delle grandezze delle accelerazioni di due figure materiali alla grandezza dell'accelerazione di una medesima figura materiale, colla quale si suppongano separatamente isolate, è eguale al rapporto corrispondente delle grandezze delle accelerazioni delle due figure, quando si suppongano isolate l'una coll'altra.

Cioè, indicando con $q_{a,b}$ il rapporto della grandezza dell'accelerazione di una figura a alla grandezza dell'accelerazione di una figura b, nell'ipotesi che le due figure a e b siano isolate l'una coll'altra, si avrà, per tre figure materiali qualunque 1, 2 e 3,

$$\frac{q_{1,3}}{q_{1,2}} = q_{3,2}\,. \tag{2}$$

§ 9. — *Definizione.* " Grandezza della massa „ di una figura materiale rispetto ad una " figura campione „ chiamiamo il rapporto della grandezza dell'accelerazione della figura campione alla grandezza dell'accelerazione della figura materiale considerata, nell'ipotesi che dette due figure siano isolate l'una coll'altra: la grandezza della massa della figura campione rispetto al medesimo campione è l'unità.

Deduciamo da questa definizione alcune conseguenze. In primo luogo, indichiamo con m e m' le grandezze della massa di una

stessa figura rispetto a due diverse figure campione, e con m'_1 la grandezza della massa del primo campione rispetto al secondo. Si deduce immediatamente da (2)

$$m' = m'_1 \, m \,. \tag{3}$$

La quale vale anche pei due campioni, poichè, indicando con $m_{1'}$, la grandezza della massa del secondo campione rispetto al primo, fornisce, applicata al primo e al secondo campione, rispettivamente le due identità

$$m'_1 = m'_1 \qquad\qquad 1 = m'_1 \, m_{1'} \,.$$

Così, la grandezza della massa di una figura materiale rispetto ad una figura campione varia, col variare il campione, con regola corrispondente a quella con cui varia la misura di una quantità rispetto ad un'unità di misura, col variare questa misura.

In secondo luogo, indicando con $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ le accelerazioni di due figure materiali, isolate l'una coll'altra, e con m_1, m_2 le loro rispettive grandezze della massa rispetto ad una figura campione qualsivoglia, la prima parte *a)* dell'Attributo 2.° si traduce nella formola

$$m_1 \mathbf{A}_1 + m_2 \mathbf{A}_2 = 0 \,. \tag{4}$$

§ 10. — *Attributo 4.°* L'accelerazione di una figura materiale isolata con due o più altre è la somma delle accelerazioni che le competono, a parità di posizione relativa (Attributo 2.° *b)*), quando sia isolata con ciascuna di esse.

Cioè, indicando con $\mathbf{A}$ l'accelerazione, ad un istante, di una figura materiale isolata con due o più altre, e con $\mathbf{A}_r$ l'accelerazione determinata dalla sua posizione rispetto alla figura r^{ma}

(Attributo 2.° *b)*), quando sia isolata con essa, sarà

$$\mathbf{A} = \sum_r \mathbf{A}_r . \tag{5}$$

§ 11. — *Attributo 5.°* Ogni parte di una figura materiale è una figura materiale.

§ 12. — *Teorema.* La grandezza della massa di una parte qualunque di una figura materiale è proporzionale al suo volume.

Immaginiamo una figura materiale, di cui τ e $\mathbf{A}$ indicano il volume e l'accelerazione ad un istante, e m la grandezza della massa rispetto ad un campione qualunque, isolata con un'altra qualsivoglia, per la quale τ' e $\mathbf{A}'$ indicano il volume e l'accelerazione allo stesso istante e m' la grandezza della massa rispetto allo stesso campione.

Sarà, per (4),

$$m\mathbf{A} + m'\mathbf{A}' = 0 . \tag{6}$$

Concepiamo ora la prima figura decomposta in un modo qualunque in parti, e indichiamo con $\Delta\tau$ e Δm il volume e la grandezza della massa, rispetto al supposto campione, della parte generica. Per (1) e (5), invocando l'Attributo 5.° (§ 11),

$$\frac{\int_{\Delta\tau} \mathbf{A}_P \, d\tau}{\Delta\tau} = \overline{\sum} \, \overline{\Delta} \mathbf{A}_i + \Delta \mathbf{A}_e :$$

dove $\overline{\Delta}\mathbf{A}_i$ e $\Delta\mathbf{A}_e$ indicano l'accelerazione della parte, supposta rispettivamente isolata con un'altra parte qualunque della stessa figura materiale, e coll'altra figura materiale, e il sommatorio $\overline{\Sigma}$ si applica a tutte le altri parti. Quindi

$$\frac{\Delta m}{\Delta\tau} \int_{\Delta\tau} \mathbf{A}_P \, d\tau = \Delta m \overline{\sum} \, \overline{\Delta} \mathbf{A}_i + \Delta m \, \Delta \mathbf{A}_e .$$

Donde, indicando con Σ un sommatorio esteso a tutte le parti, si ha

$$\sum \frac{\Delta m}{\Delta \tau} \int_{\Delta \tau} \mathbf{A}_P \, d\tau - \sum \Delta m \, \Delta \mathbf{A}_e = 0\,, \tag{7}$$

poichè, per (4),

$$\sum \overline{\sum} \Delta m \overline{\Delta} \mathbf{A}_i = 0.$$

Ora, per la stessa (4),

$$\Delta m \, \Delta \mathbf{A}_e = - m' \, \Delta \mathbf{A}'_e\,,$$

indicando con $\Delta \mathbf{A}'_e$ l'accelerazione della seconda figura, isolata colla parte generica della prima. Quindi

$$\sum \Delta m \Delta \mathbf{A}_e = - m' \sum \Delta \mathbf{A}'_e\,.$$

Ma, per (5),

$$\sum \Delta \mathbf{A}'_e = \mathbf{A}'_e\,.$$

Così, (7) si riduce a

$$\sum \frac{\Delta m}{\Delta \tau} \int_{\Delta \tau} \mathbf{A}_P \, d\tau + m' \mathbf{A}' = 0\,,$$

e, per (6), a

$$\sum \frac{\Delta m}{\Delta \tau} \int_{\Delta \tau} \mathbf{A}_P \, d\tau - m \mathbf{A} = 0\,,$$

ossia, per (1), a

$$\sum \left(\frac{\Delta m}{\Delta \tau} - \frac{m}{\tau} \right) \int_{\Delta \tau} \mathbf{A}_P \, d\tau = 0\,.$$

E siccome, a parità di decomposizione, $\int_{\Delta \tau} \mathbf{A}_P \, d\tau$ può variare in infiniti modi (Attributo 2.° *b)*), concludiamo, per una parte qua-

lunque della figura materiale,

$$\frac{\Delta m}{\Delta \tau} = \frac{m}{\tau} \tag{8}$$

c. v. d.

§ 13. — *Corollario.* La grandezza della massa di una figura materiale è eguale alla somma delle grandezze della massa delle singole parti in cui, in un modo qualunque, s'immagini decomposta.

Di fatti, per (8), indicando con $\tau_1, \tau_2 \dots \tau_\nu$ e con $m_1, m_2 \dots m_\nu$ i volumi e le grandezze della massa delle singole parti,

$$\frac{m_1}{\tau_1} = \frac{m_2}{\tau_2} = \dots = \frac{m_\nu}{\tau_\nu} = \frac{m_1+m_2+\dots+m_\nu}{\tau_1+\tau_2+\dots+\tau_\nu} = \frac{m}{\tau},$$

donde

$$m_1 + m_2 + \dots + m_\nu = m.$$

§ 14. — *Definizione.* " Grandezza della densità di una figura materiale rispetto ad una figura campione „ chiamiamo il rapporto costante della grandezza della massa di una sua parte qualsivoglia, o della stessa figura materiale, rispetto all'indicato campione, al volume della parte, o della figura, rispettivamente.

Condizione intrinseca del movimento di una figura materiale.

§ 15. — La grandezza della densità, rispetto ad un certo campione, di una figura materiale, ad un istante, sarà generalmente una funzione di questo istante, e cioè del tempo t. Noi supporremo che essa sia regolare. Indichiamola con k, e manteniamo a $\Delta\tau, \Delta m$ il significato precedente di volume e di grandezza della massa di una parte qualunque della considerata figura materiale. Sarà

$$k\,\Delta\tau = \Delta m = \text{costante rispetto a } t.$$

Indichiamo com $\Delta\tau_0$ il volume della *stessa parte* al tempo particolare t_0, cioè il volume della parte del campo rappresentante

la figura al tempo t_0, che corrisponde alla parte in discorso del campo che rappresenta la stessa figura al tempo t, secondo i principii dello spostamento e del movimento regolare. Avremo ancora

$$k \frac{\Delta\tau}{\Delta\tau_0} = \text{costante rispetto a } t.$$

Quindi anche

$$k \lim \frac{\Delta\tau}{\Delta\tau_0} = \text{costante rispetto a } t,$$

indicando con lim il limite collo svanire del raggio di una sfera, col centro in un punto della parte, capace di contenere la parte medesima.

Ora

$$(1) \qquad \lim \frac{\Delta\tau}{\Delta\tau_0} = \mathrm{D} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial x_0} \\ \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} \\ \frac{\partial x}{\partial z_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{vmatrix},$$

indicando con x, y, z, e x_0, y_0, z_0, le coordinate del suddetto punto al tempo t e al tempo t_0.

Il punto P_0, di coordinate x_0, y_0, z_0, riesce così il punto generico del campo rappresentante la figura materiale mobile al tempo t_0, al quale, per ogni valore t, corrisponde il punto P, di coordinate x, y, z, del campo rappresentante la figura allo stesso tempo t: con che P e P_0 si considerano come i posti ai tempi t e t_0 di uno stesso punto mobile, appartenente alla figura, individuato per mezzo del suo posto P_0 a t_0.

Abbiamo quindi

$$(2) \qquad k\,\mathrm{D} = \text{costante rispetto a } t, \text{ (funzione di } P_0).$$

Ossia

$$\frac{d\,k\,\mathrm{D}}{dt}=0, \tag{2'}$$

dove $\frac{d}{dt}$ indica la derivata parziale rispetto a t di $k\,\mathrm{D}$ concepito come funzione di t e di P_0, ossia come riferito, ad ogni istante, allo *stesso punto* della figura mobile.

La (2), o la (2)', rappresenta una condizione intrinseca del movimento di una figura materiale qualunque, cioè una condizione del suo movimento indipendente dalla sua relazione con altre figure. Essa traduce la condizione della costanza della grandezza della massa di ogni parte della figura materiale, e può quindi chiamarsi l'equazione della costanza della grandezza della massa.

§ 16. — Deduciamo alcune conseguenze. Indichi f una funzione regolare del tempo t del posto generico P del campo rappresentante una figura materiale allo stesso tempo t. Per (2)' abbiamo, in primo luogo,

$$\frac{d\int_\tau f\,k\,d\tau}{dt}=\int_\tau \frac{df}{dt}\,k\,d\tau\,, \tag{3}$$

dove $\frac{d}{dt}$ conserva il precedente significato, per modo che $\frac{df}{dt}$ rappresenta la derivata parziale rispetto a t di f, concepita come funzione di t e di P_0 composta con P. Al qual proposito, rammentiamo che, indicando con $\frac{\partial f}{\partial t}$ la derivata parziale rispetto a t di f, concepita invece come funzione di t e di P, sarà

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}\,.$$

Difatti, indichiamo, per un momento, con $\bar{f}$ la suddetta funzione di f e di P_0. Si ha, per la formola di trasformazione degli integrali di spazio,

$$\int_\tau f k \, d\tau = \int_{\tau_0} \bar{f} k \, D \, d\tau_0. \tag{4}$$

Di qui, per (2)',

$$\frac{d \int_\tau f k \, d\tau}{dt} = \int_{\tau_0} \frac{d\bar{f}}{dt} k \, D \, d\tau_0 ,$$

donde conformemente alla stessa (4), si deduce (3).

In secondo luogo, abbiamo

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_\tau f k \, d\tau = \int_\tau k \, d\tau \int_{t_1}^{t_2} f \, dt , \tag{5}$$

dove, nel secondo membro, τ e k indicano il campo rappresentante la figura materiale, e la grandezza della densità ad un tempo t determinato qualsivoglia, appartenente all'intervallo $(t_1\, t_2)$.

Difatti, da (4), per (2)', segue

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_\tau f k \, d\tau = \int_{\tau_0} k \, D \, d\tau_0 \int_{t_1}^{t_2} \bar{f} \, dt ,$$

donde, conformemente alla stessa (4), si deduce (5).

§ 17. — *Osservazione.* Le formole (3) e (5), col precedente ragionamento, si estendono senz'altro all'ipotesi che k rappresenti una funzione, oltre che del tempo t, anche del punto P, soddisfacente la (2)'.

Punto medio di una figura materiale.

§ 18. — " Punto medio ", $\overline{P}$, di una figura materiale si chiama il punto definito per mezzo di

$$\overline{P}-O = \frac{\int_\tau (P-O)\,d\tau}{\tau}, \tag{1}$$

e dell' origine fissa O, dalla quale esso risulta indipendente, vale a dire il punto $\overline{P}$ (indipendente da O), per cui $\overline{P}-O$ è il valor medio di $P-O$ entro τ [1]).

Ciò val quanto dire che, indicando con $\bar{x}$ e con x la misura della projezione di $\overline{P}-O$ e di $P-O$ sopra un asse avente un' orientazione qualunque, passante per O, ossia la coordinata di $\overline{P}$ e di P relativa a codesto asse e a codesta origine, sarà

$$\bar{x} = \frac{\int_\tau x\,d\tau}{\tau}:$$

cioè $\bar{x}$ sarà il valor medio di x entro τ.

Così, x_1 e x_2 designando il minimo e il massimo valore di x in τ, si ha

$$x_1 < \bar{x} < x_2:$$

E, per conseguenza, ogni superficie chiusa, tutta convessa, che contiene il campo τ, conterrà il punto $\overline{P}$ nel suo interno.

Riesce poi evidente che il punto $\overline{P}$ apparterrà ad ogni eventuale asse di simmetria della figura.

---

[1]) Per la rappresentazione dei vettori, come, in seguito, dei prodotti vettoriali, ci atteniamo ai simboli usati da BURALI, FORTI e MARCOLONGO nell'opera ricordata nella suddetta Appendice.

§ 19. — Poniamo, per un momento,

$$\overline{\mathbf{V}} = \frac{d(\overline{\mathrm{P}}-\mathrm{O})}{dt}, \qquad \overline{\mathbf{A}} = \frac{d\overline{\mathbf{V}}}{dt} = \frac{d^2(\overline{\mathrm{P}}-\mathrm{O})}{dt^2},$$

con che $\overline{\mathbf{V}}$ e $\overline{\mathbf{A}}$ rappresentano la velocità e l' accelerazione di $\overline{\mathrm{P}}$ al tempo t. Per (1), indicando con k la grandezza della densità della figura materiale allo stesso tempo t, e valendosi della circostanza che $k\tau$ è invariabile col tempo, e di (3) del § 16, abbiamo

$$\overline{\mathbf{V}} = \frac{d}{dt}\frac{\int_\tau (\mathrm{P}-\mathrm{O})\,d\tau}{\tau} = \frac{d}{dt}\frac{k\int_\tau (\mathrm{P}-\mathrm{O})\,d\tau}{k\tau} = \frac{\frac{d}{dt}\int_\tau (\mathrm{P}-\mathrm{O})\,k\,d\tau}{k\tau}$$

$$= \frac{\int_\tau \frac{d(\mathrm{P}-\mathrm{O})}{dt}\,k\,d\tau}{k\tau} = \frac{\int_\tau \frac{d(\mathrm{P}-\mathrm{O})}{dt}\,d\tau}{\tau} = \frac{\int_\tau \mathbf{V}_\mathrm{P}\,d\tau}{\tau},$$

indicando con $\mathbf{V}_\mathrm{P}$ la velocità del punto P al tempo t.

In seguito a che, valendosi delle stesse circostanze,

$$\overline{\mathbf{A}} = \frac{d\overline{\mathbf{V}}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\int_\tau \mathbf{V}_\mathrm{P}\,d\tau}{\tau} = \frac{d}{dt}\frac{k\int_\tau \mathbf{V}_\mathrm{P}\,d\tau}{k\tau} = \frac{\frac{d}{dt}\int_\tau \mathbf{V}_\mathrm{P}\,k\,d\tau}{k\tau}$$

$$= \frac{\int_\tau \frac{d\mathbf{V}_\mathrm{P}}{dt}\,k\,d\tau}{k\tau} = \frac{\int_\tau \frac{d\mathbf{V}_\mathrm{P}}{dt}\,d\tau}{\tau} = \frac{\int_\tau \mathbf{A}_\mathrm{P}\,d\tau}{\tau};$$

e, richiamando (1) del § 6,

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}.$$

Concludiamo così che coincidono, ad ogni istante, l' accelerazione della figura materiale e quella del suo punto medio; ossia che ciò che abbiamo definito come accelerazione di una figura materiale è l' accelerazione del suo punto medio.

§ 20. — *Osservazione.* Notiamo che, definendo la velocità $\mathbf{V}$ di una figura materiale, ad un tempo qualunque, con

$$\mathbf{V} = \frac{\int_\tau \mathbf{V}_P \, d\tau}{\tau},$$

cioè col valore medio delle velocità $\mathbf{V}_P$ dei punti della figura allo stesso istante, si ha, pel precedente risultato,

$$\overline{\mathbf{V}} = \mathbf{V};$$

cioè coincidono, ad ogni istante, la velocità della figura materiale e quella del suo punto medio.

§ 21. — *Osservazione.* Notiamo ancora che, introducendo la definizione di " punto materiale ", come ente definito da un punto mobile e da una grandezza della massa, gli attributi delle figure materiali si possono enunciare come corrispondenti attributi di punti materiali. Ci si riconduce con questo al linguaggio più comunemente tenuto nei trattati di meccanica, con un particolare e più preciso significato del punto materiale.

Sistema di figure materiali.

§ 22. — *Definizione.* " Sistema di figure materiali " chiamiamo ogni insieme di figure materiali, colla condizione che i campi che le rappresentano, ad ogni istante, non si compenetrano l'uno l'altro. Ne viene che, indicando con τ e con τ_r il volume del campo appartenente al sistema e alla figura materiale generica componente, ed anche i campi medesimi, allo stesso istante, sarà

$$\tau = \sum\nolimits_r \tau_r \,. \tag{1}$$

Osserviamo che ogni figura materiale, in quanto si può concepire come insieme delle sue parti, rientra nella precedente definizione.

§ 23. — *Definizione.* " Grandezza della massa di un sistema di figure materiali, rispetto ad una figura campione, " chiamiamo la somma delle grandezze della massa delle singole figure materiali componenti, rispetto allo stesso campione. Cioè, indicando con m e con m_r la grandezza della massa del sistema e della figura generica, rispetto allo stesso campione, sarà

$$m = \sum_r m_r \,, \tag{2}$$

(che, pel § 13, vale per una figura materiale, considerata come sistema formato dalle sue parti).

§ 24. — *Definizione.* " Accelerazione di un sistema di figure materiali ", ad un istante, chiamiamo il vettore, $\mathbf{A}$, definito, indicando con $\mathbf{A}_r$ l'accelerazione della figura materiale generica, allo stesso istante, da

$$\mathbf{A} = \frac{\Sigma_r m_r \mathbf{A}_r}{m} \,, \tag{3}$$

(che si riconosce subito valere per una figura materiale, considerata come sistema formato dalle sue parti).

§ 25. — *Definizione.* " Punto medio di un sistema di figure materiali " chiamiamo il punto, $\overline{\mathrm{P}}$, definito, indicando con $\overline{\mathrm{P}}_r$ il punto medio della figura componente generica, per mezzo di

$$\overline{\mathrm{P}} - \mathrm{O} = \frac{\Sigma_r m_r (\overline{\mathrm{P}}_r - \mathrm{O})}{m} \,, \tag{4}$$

e dell'origine fissa O, dalla quale lo stesso punto $\overline{\mathrm{P}}$ risulta indipendente; (che si riconosce subito valere per una figura materiale, considerata come sistema composto dalle sue parti).

§ 26. — Dagli attributi delle figure materiali e loro conseguenze (§§ 5-11) scaturiscono senz'altro le seguenti proprietà analoghe del sistema di figure materiali.

1.ª Ogni sistema di figure materiali possiede una individualità, per la quale infiniti movimenti diversi possono essere attribuiti allo stesso sistema di figure materiali. Esiste un'infinità di sistemi di figure materiali, distinti per la suddetta individualità. Ogni sistema di figure materiali si può supporre isolato con uno o più altri.

2.ª La grandezza della massa di un sistema di figure materiali rispetto ad un campione muta, col mutare il campione, come la misura di una quantità col mutare l'unità di misura: cioè da m a m' secondo la formola

$$m' = m'_1 \, m \, , \tag{5}$$

indicando con m'_1 la grandezza della massa del primo campione rispetto al secondo.

La grandezza della massa di un sistema di figure materiali rispetto ad un campione stabilito è invariabile col tempo e colla specie del movimento del sistema, dipendendo puramente dal sistema considerato, in quanto è individuato per la 1.ª proprietà.

3.ª *a)* Le accelerazioni di due sistemi di figure materiali isolati l'uno coll'altro o sono ambedue nulle o hanno orientazioni parallele ed opposte, e grandezze il cui rapporto è l'inverso del rapporto delle grandezze della massa. Per modo che, indicando con m_1, m_2 le grandezze della massa dei due sistemi, rispetto ad un campione qualunque, e con $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ le loro accelerazioni, ad un istante, nell'ipotesi che siano isolati l'uno coll'altro, si ha

$$m_1 \mathbf{A}_1 + m_2 \mathbf{A}_2 = 0 \, . \tag{6}$$

b) L'accelerazione di un sistema di figure materiali, isolato con un altro, ad ogni istante, è determinata dalla posizione del sistema rispetto all'altro, e può variare in infiniti modi, mutando codesta posizione relativa, e lo stesso secondo sistema.

4.ª L'accelerazione di un sistema di figure materiali, isolato con due o più altri, ad ogni istante, è la somma delle accelerazioni che competono al sistema, separatamente isolato con ciascuno degli altri, nella stessa posizione relativa a ciascun d'essi (Proprietà 3.ª *b)*). Vale a dire, indicando con $\mathbf{A}$ l'accelerazione, ad un istante, di un sistema isolato con due o più altri, e con $\mathbf{A}_r$ l'accelerazione, che gli compete, isolato col sistema generico, nella stessa posizione relativa dalla quale $\mathbf{A}_r$ risulta determinata (Proprietà 3.ª *b)*), si ha

$$\mathbf{A} = \sum\nolimits_r \mathbf{A}_r \,. \tag{7}$$

5.ª Ogni parte di un sistema di figure materiali è un sistema di figure materiali.

§ 27. — Per la proprietà analoga del punto medio di una figura materiale (§ 19), scaturisce da (3) e da (4) che, ad ogni istante, coincidono l'accelerazione di un sistema di figure materiali e quello del suo punto medio, ossia che l'accelerazione del sistema di figure materiali, ad ogni istante, è l'accelerazione del suo punto medio.

§ 28. — Serbiamo a τ_r e a τ il precedente significato (§ 22), e indichiamo con P_r e P il punto generico di τ_r e di τ, con k_r la grandezza della densità della figura generica, contraddistinta dall'indice r, e, infine, con k la funzione del punto P che si riduce a k_r in ogni campo τ_r.

Abbiamo, in base a

$$m_r = k_r \, \tau_r \,,$$

in primo luogo,

$$\sum\nolimits_r m_r = \sum\nolimits_r k_r \, \tau_r = \sum\nolimits_r \int_{\tau_r} k_r \, d\tau_r = \int_\tau k \, d\tau \,,$$

e, per (2),

$$m = \int_\tau k \, d\tau ; \tag{8}$$

in secondo luogo,

$$\sum_r m_r \mathbf{A}_r = \sum_r k_r \tau_r \mathbf{A}_r = \sum_r \int_{\tau_r} \mathbf{A}_{\mathrm{P}_r} d\tau_r = \sum_r \int_{\tau_r} k_r \mathbf{A}_{\mathrm{P}_r} d\tau_r = \int_\tau k \mathbf{A}_\mathrm{P} d\tau ,$$

e, per (3),

$$\mathbf{A} = \frac{\int_\tau k \mathbf{A}_\mathrm{P} d\tau}{m} ; \tag{9}$$

finalmente,

$$\sum_r m_r (\overline{\mathrm{P}}_r - \mathrm{O}) = \sum_r k_r \tau_r (\overline{\mathrm{P}}_r - \mathrm{O}) = \sum_r k_r \int_{\tau_r} (\mathrm{P}_r - \mathrm{O}) d\tau_r = \sum_r \int_{\tau_r} k_r (\mathrm{P}_r - \mathrm{O}) d\tau_r$$

$$= \int_\tau k (\mathrm{P} - \mathrm{O}) d\tau ,$$

e, per (4),

$$\overline{\mathrm{P}} - \mathrm{O} = \frac{\int_\tau k (\mathrm{P} - \mathrm{O}) d\tau}{m} . \tag{10}$$

§ 29. — *Osservazione.* Notiamo che, nel formulare le proprietà dei sistemi di figure materiali, sono essenziali i rapporti delle m, per cui alle stesse m potranno sempre sostituirsi, collo stesso effetto, le m' definite da

$$m' = \frac{m}{m_1} , \tag{11}$$

dove m_1 rappresenta la m per un determinato sistema di figure materiali. Con questo si ha $m' = 1$ per codesto sistema, ed m' si chiamerà la grandezza della massa del sistema qualsivoglia, rispetto a codesto sistema come campione. Alla figura campione

a cui si riferisce m risulta per grandezza della massa rispetto al nuovo campione $m' = \frac{1}{m_1}$; e così la (11) è perfettamente conforme alla (3) del § 9.

Postulati dei corpi naturali.

§ 30. — *Postulato.* Si estendono ai corpi naturali le proprietà stabilite per le figure materiali e pei sistemi di figure materiali con questo che la " grandezza della densità del corpo naturale, nel punto generico di esso, al tempo generico " (k), per mezzo della quale si formano (mediante le (8) e (9) del § 28) le espressioni della " grandezza della massa del corpo naturale rispetto ad un corpo naturale campione " (m), e l' " accelerazione del corpo naturale, al tempo generico " (**A**), s'intende poter rappresentare una funzione positiva, generalmente regolare, qualsivoglia, del punto: e inoltre, a determinare l'accelerazione di un corpo naturale, concepito isolato con un altro, s'intende concorrere colla posizione relativa la " condizione fisica " (stato neutro o naturale, stato elettrico, stato magnetico etc.).

Intesi così sul significato preciso dei termini, questo postulato si può enunciare nella forma riassuntiva che un corpo naturale, in una determinata condizione fisica, si comporta o come una figura materiale, o come un sistema di figure materiali, o come limite di un sistema di figure materiali, distribuito nel contorno assegnato al corpo naturale, collo svanire di una sfera capace di contenere le singole figure componenti.

§ 31. — *Postulato.* Concepite in un corpo naturale accumulate due o più condizioni fisiche, l'accelerazione del corpo naturale, isolato con un altro, sarà la somma delle accelerazioni, che, a parità di circostanze rimanenti, gli competono, colle singole condizioni fisiche, separatamente.

Osservazione. Notiamo, a questo proposito, che, indicando con m_1, m_2 le grandezze della massa, rispetto ad un campione qualsivoglia, e con $\mathbf{A}_1$ e $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}'_1$ e $\mathbf{A}'_2$ le accelerazioni corrispondenti a due condizioni fisiche diverse, che competono, secondo il primo postulato, a due corpi naturali, in conseguenza della loro posizione relativa, al supposto istante, dovranno verificarsi le due relazioni

$$m_1 \mathbf{A}_1 + m_2 \mathbf{A}_2 = 0 \ , \qquad m_1 \mathbf{A}'_1 + m_2 \mathbf{A}'_2 = 0 \ ,$$

e che da queste segue

$$m_1 (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}'_1) + m_2 (\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}'_2) = 0 :$$

per modo che $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}'_1$ e $\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}'_2$ possono essere legittimamente supposte accelerazioni dei due corpi naturali, isolati l'uno coll'altro, determinate dalla suddetta posizione relativa, con una terza condizione fisica.

§ 32. — Con questi postulati si procura di formare un'immagine dei corpi concreti della Fisica, rispondente agli indicati scopi della teoria matematica del loro movimento. La proprietà della individualità, e quelle che direttamente vi si connettono, hanno una manifesta corrispondenza con proprietà analoghe dei corpi concreti. Lo stesso dicasi della proprietà che ogni parte di un corpo naturale è un corpo naturale. Le rimanenti implicano tutte la proprietà che i corpi naturali comandano reciprocamente i proprii movimenti, e rappresentano altrettante modalità generali di codesta "mutua azione". È pure manifesto, sotto questo aspetto, la corrispondenza fra i nostri postulati e il fatto fisico, per quanto concerne l'esistenza di tale "mutua azione", e alcune circostanze attinenti ad essa, come la sua connessione colla posizione, e, a parità di questa, la sua dipendenza da particolari

“condizioni fisiche„, delle quali sono esempii concreti lo stato elettrico, lo stato magnetico, lo stato neutro ecc. Per quanto a maggiori particolari, si potrebbero citare esperimenti ed osservazioni, che avvalorano la corrispondenza in discorso. Ma la verificazione, che ci riserbiamo di fare, di mano in mano, della corrispondenza fra le conseguenze dei nostri postulati e i fenomeni fisici, riesce la sua miglior prova, ed anche la più genuina: poichè realmente le postulate modalità della mutua azione dei corpi naturali sono intese riassumere una quantità di fatti, piuttosto che rappresentare un fatto dimostrabile con speciali esperimenti. Occorre tuttavia intendersi sul significato, in confronto dell'esperienza, dell'ipotesi che un corpo naturale possa supporsi isolato con uno o più altri.

Ora, la stessa esperienza, che rivela, come dicevamo, il fatto della “azione mutua„ dei corpi, e la sua dipendenza dalla posizione, rivela altresì il fatto che gli effetti di codesta azione, giudicati almeno in un tempo abbastanza breve, diventano insensibili, quando la distanza dei corpi considerati supera un certo limite: e ancora che gli effetti dell'azione di uno o più corpi, sopra un corpo determinato, possono riuscire così preponderanti, in confronto degli effetti dell'azione degli altri corpi, a cagione della minor distanza, o d'altre circostanze, da poter trascurare codesti, senza apprezzabile alterazione del fenomeno. Si conclude pertanto che l'ipotesi in discorso corrisponde ad una condizione di fatto, se non realizzabile esattamente, suscettibile però di un'approssimazione, che, almeno in molti casi, conta praticamente come la stessa realtà.

Massa e densità dei corpi naturali.

§ 33. — Per quanto precede, al numero positivo, che rappresenta la grandezza della massa di un corpo naturale, rispetto ad un

certo corpo naturale campione, (§ 30), competono le proprietà caratteristiche della misura, rispetto alla quantità della medesima specie, corrispondente al campione, come unità di misura, di una quantità

a) invariabile per ogni corpo naturale, e per ogni parte di un corpo naturale, qualunque siano il tempo, e le circostanze del movimento,

b) tale che la "somma„ di due o più quantità della specie, corrispondenti ad altrettanti corpi naturali, è la quantità della stessa specie che corrisponde al corpo naturale formato dall'insieme di quelli,

c) tale che la quantità corrispondente ad un corpo naturale qualunque è la "somma„ delle quantità corrispondenti alle singole parti in cui comunque s'immagini decomposto.

Introdurremo questa nuova quantità col nome di "massa di un corpo naturale„.

Con questo, nella precedente trattazione, possiamo senz'altro sostituire dappertutto la grandezza della massa di un corpo naturale rispetto ad un altro, come campione, colla misura della massa dello stesso corpo naturale, rispetto ad una certa unità di massa. Ne viene, in particolare, che il rapporto delle masse di due corpi naturali qualunque è eguale al rapporto inverso delle grandezze delle loro accelerazioni, quando si suppongano isolati l'uno coll'altro, o ciascuno, separatamente, isolato con un terzo.

§ 34. — "Densità di un corpo naturale„ chiamiamo la quantità la cui misura è rappresentata dal numero positivo k (§ 30), che rappresenta la grandezza della densità del corpo naturale rispetto al supposto campione, rispetto, alla sua volta, all'unità $[k]$, derivata dalle unità $[l]$ e $[m]$ di lunghezza e di massa, conformemente alla equazione dimensionale

$$[k] = [l^{-3} m].$$

La densità va generalmente precisata, indicando il tempo t, e il punto P del campo rappresentante il mobile allo stesso tempo t, a cui essa si riferisce.

§ 35. — " Corpo naturale omogeneo " si chiama un corpo naturale, per cui la densità, ad ogni istante, è indipendente dal punto. La figura materiale si traduce pertanto in un corpo naturale omogeneo connesso. Il corpo naturale omogeneo costituisce l'immagine di quei corpi concreti, che si chiamano, in Fisica, omogenei, in quanto presentano le stesse proprietà in ogni loro parte, piccola a piacere. È quindi a siffatti corpi che si possono riferire le esperienze su cui sono fondati gli attributi delle figure materiali.

§ 36. — Nel corpo naturale omogeneo, indicando con k la misura della densità ad un istante qualunque, con $\Delta\tau$ e Δm le misure del volume, allo stesso istante, e della massa di una parte qualunque del corpo, è

$$k = \frac{\Delta m}{\Delta\tau}.$$

Sia ora un corpo naturale qualunque, e supponiamo k funzione regolare del punto del campo τ, che lo rappresenta al tempo t. Avremo, col precedente significato dei simboli,

$$\Delta m = \int_{\Delta\tau} k\, d\tau = \bar{k}\, \Delta\tau,$$

indicando con $\bar{k}$ un valor medio di k in $\Delta\tau$. Quindi

$$\bar{k} = \frac{\Delta m}{\Delta\tau}, \qquad k = \lim \frac{\Delta m}{\Delta\tau},$$

il limite intendendosi preso collo svanire del raggio di una sfera, col centro nel punto generico del campo, capace di contenere la parte in discorso dello stesso campo.

Sotto altra forma,

$$\Delta m = (k + \alpha) \Delta\tau .$$

dove α svanisce col raggio della suddetta sfera; per modo che, per ogni punto del campo,

$$\Delta m = k \Delta\tau$$

fornisce un'espressione approssimata della massa di una parte sufficientemente piccola, contenente il punto.

Ne viene, indicando con f una funzione integrabile in τ,

$$\lim \sum \bar{f} \Delta m = \lim \sum \bar{f} (\bar{k} + \bar{\alpha}) \Delta\tau = \lim \sum \bar{f} \bar{k} \Delta\tau = \int_\tau f k \, d\tau :$$

dove, concepito il campo τ decomposto comunque in parti $\Delta\tau$ di massa Δm, $\bar{f}$ indica il valore di f in un punto qualunque di $\Delta\tau$, al quale si riferiscono egualmente $\bar{k}$ e $\bar{\alpha}$: la somma abbraccia tutte le parti: e il limite s'intende preso collo svanire del raggio di una sfera capace di contenere le singole parti.

Difatti, è manifestamente

$$\lim \sum \bar{\alpha} \Delta\tau = 0 .$$

E perciò, f essendo intesa finita, anche

$$\lim \sum \bar{f} \bar{\alpha} \Delta\tau = 0 .$$

Si consegue così un particolar significato dell'integrale della forma $\int f k \, d\tau$, di cui facciamo continuamente uso.

§ 37. — Dimostreremo più tardi che il rapporto delle masse di due corpi naturali, quale risulta dalla precedente definizione, trova il suo riscontro nel rapporto dei pesi, determinati nel medesimo luogo, dei corrispondenti corpi concreti. Con questo si

riconosce la corrispondenza fra la massa, col significato della suddetta definizione, e la massa, col significato con cui è ordinariamente adoperata nella Fisica e nella Tecnica.

Per quanto alla corrispondenza fra la massa, col significato matematico o teorico, e la " quantità di materia „ della comune intuizione, si deve osservare, innanzi tutto, che il concetto della quantità di materia, fondato sulla intuizione, non è, di sua natura, esattamente definito, quanto occorre per comportare un'effettiva misura: e, per conseguenza, vano sarebbe cercare una precisa corrispondenza fra esso e il concetto inerente ad una quantità matematicamente definita. Tuttavia, l'invariabilità della massa teorica, la sua relazione colla composizione mediante altri corpi, e colla decomposizione in parti di un corpo naturale, la sua accennata relazione col peso dei corpi concreti, sono altrettante circostanze che mettono in evidenza la sua parentela col concetto intuitivo della quantità di materia, per modo da giustificarne il nome, e farne presagire l'utilità nello studio delle questioni, in cui l'intuizione introduce l'idea della quantità di materia, col proprio men preciso significato.

Equazione della conservazione della massa.

§ 38. — Indichi $\Delta\tau$ il volume e il campo di una parte qualunque di un corpo naturale, al tempo t, e k la densità nel punto generico di questa parte, allo stesso tempo t. Sarà (inteso k regolare in $\Delta\tau$)

$$\int_{\Delta\tau} k\, d\tau = \bar{k}\, \Delta\tau = \text{costante rispetto a } t,$$

indicando con $\bar{k}$ un valor medio di k in $\Delta\tau$. Quindi anche, dinotando $\Delta\tau_0$ il volume della stessa parte al tempo t_0,

$$\bar{k}\, \frac{\Delta\tau}{\Delta\tau_0} = \text{costante rispetto a } t.$$

E di qui, come al § 16, collo stesso significato di D, indicando con P_0 un punto qualunque del campo τ_0, rappresentante il corpo naturale al tempo t_0, al quale corrisponde il punto P del campo τ, rappresentante lo stesso corpo al tempo t,

$$\lim \bar{k} \frac{\Delta\tau}{\Delta\tau_0} = \lim \bar{k} \lim \frac{\Delta\tau}{\Delta\tau_0} = k\mathrm{D} \text{ costante rispetto a } t \text{ (funzione di } P_0\text{)},$$

il limite intendendosi collo svanire del raggio di una sfera col centro in P_0, capace di contenere la parte, e k denotando la densità al tempo t, nel punto P.

Quindi anche, come allo stesso § 16,

$$\frac{dk\mathrm{D}}{dt} = 0, \tag{1}$$

$\frac{d}{dt}$ indicando la derivata rispetto a t, a parità di P_0, ossia la derivata rispetto a t di $k\mathrm{D}$, concepito come funzione di t e di P_0, composta con P.

Alla (1) si può dare la seguente forma, in coordinate attuali. Se ne ricava, in primo luogo,

$$\frac{d\mathrm{D}}{dt} + k \frac{1}{\mathrm{D}} \frac{d\mathrm{D}}{dt} = 0 .$$

Ora,

$$\frac{d\mathrm{D}}{\mathrm{D}} = \frac{d \lim \frac{\Delta\tau}{\Delta\tau_0}}{\lim \frac{\Delta\tau}{\Delta\tau_0}} = \lim \frac{d \frac{\Delta\tau}{\Delta\tau_0}}{\frac{\Delta\tau}{\Delta\tau_0}} = \lim \frac{d\Delta\tau}{\Delta\tau}.$$

Quindi

$$\frac{\frac{d\mathrm{D}}{\mathrm{D}}}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

per una formola di Cinematica, rappresentando con u, v, w le componenti della velocità al tempo t nel punto P.

Ne segue

$$\frac{dk}{dt} + k\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0 .$$

Ma si ha

$$\frac{dk}{dt}=\frac{\partial k}{\partial t}+\frac{\partial k}{\partial x}u+\frac{\partial k}{\partial y}v+\frac{\partial k}{\partial z}w\,.$$

E, per conseguenza,

$$\frac{\partial k}{\partial t}+\frac{\partial ku}{\partial x}+\frac{\partial kv}{\partial y}+\frac{\partial kw}{\partial z}=0\,, \tag{3}$$

che è la forma di (1) in coordinate attuali, a cui accennavamo.

Osservazione. Richiamando l'*Osservazione* del § 17, in base a (1), stanno le formole (3) e (5) del § 16, col presente significato di k, come funzione di t e di P.

Centro di massa di un corpo naturale.

§ 39. — " Centro di massa di un corpo naturale „ chiamiamo il punto, $\overline{\mathrm{P}}$, definito, conformemente a (10) del § 28, per mezzo di

$$\overline{\mathrm{P}}-\mathrm{O}=\frac{\int_\tau k(\mathrm{P}-\mathrm{O})\,d\tau}{m}\,. \tag{1}$$

e dell'origine fissa O, dalla quale lo stesso punto $\overline{\mathrm{P}}$ risulta indipendente.

Ciò val quanto dire che, indicando con $\bar{x}$ e x coordinate omologhe di $\overline{\mathrm{P}}$ e di P, sarà

$$\bar{x}=\frac{\int_\tau kx\,d\tau}{m}\,. \tag{2}$$

Donde segue che, dinotando x_1, x_2 il minimo e il massimo valore di x in τ, sarà

$$x_1<\bar{x}<x_2;$$

e, per conseguenza, ogni superficie chiusa, tutta convessa, che contenga il campo τ, conterrà, nel suo interno, il punto $\overline{\mathrm{P}}$.

Rileviamo ancora che, in base a (1), immaginando il campo τ decomposto in parti, e indicando con τ_r, m_r e $\overline{\mathrm{P}}_r$ il campo gene-

rico e il suo volume, la massa della parte corrispondente del corpo naturale, e il centro di massa della stessa parte, si ha

$$\bar{\mathrm{P}} - \mathrm{O} = \frac{\sum_r m_r (\bar{\mathrm{P}}_r - \mathrm{O})}{m} . \tag{3}$$

§ 40. — Indichiamo, per un momento, con $\bar{\mathbf{A}}$ l'accelerazione di $\bar{\mathrm{P}}$ al tempo t. Da (1), valendosi della (3) del § 16, in base all'*Osservazione* del § 38, ricaviamo

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{d^2(\bar{\mathrm{P}} - \mathrm{O})}{dt^2} = \frac{\int_\tau k \frac{d^2(\mathrm{P} - \mathrm{O})}{dt^2} d\tau}{m} = \frac{\int_\tau k \mathbf{A}_\mathrm{P} d\tau}{m} = \mathbf{A} .$$

Quindi, ad ogni istante, coincidono l'accelerazione del centro di massa e quella del corpo naturale, ossia il vettore introdotto come accelerazione del corpo naturale riesce l'accelerazione del centro di massa.

Forza motrice di un corpo naturale.

§ 41. — "Forza motrice di un corpo naturale", ad un istante, chiamiamo il prodotto della massa del corpo naturale per la sua accelerazione al considerato istante [1]).

Ciò vuol dire, non potendo la misura della massa essere altrimenti che positiva, che l'orientazione della forza motrice è la stessa di quella dell'accelerazione del corpo naturale, e la sua grandezza il prodotto delle grandezze della massa e dell'accelerazione medesima. Con questo l'unità [R] di forza motrice riesce

---

[1]) Mutationem motus proportionalem esse vi impressae et fieri secundum lineam qua vis illa imprimitur (NEWTON. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. Axiomata sive Leges Motus.* Lex II). Cfr. in proposito le mie *Réflexions sur l'Exposition des Principes de la Mécanique Rationnelle (Enseignement Mathématique,* 1901).

una unità derivata dalle unità $[l]$, $[m]$, $[t]$ di lunghezza, di massa e di tempo secondo l'equazione dimensionale

$$[\mathrm{R}] = [l m t^{-2}].$$

Conformemente a codesta definizione, indicando con $\mathbf{R}$ la forza motrice del corpo naturale precedentemente considerato, collo stesso significato dei simboli, abbiamo

$$\mathbf{R} = \int_\tau k \mathbf{A}_{\mathrm{P}} d\tau \,. \tag{1}$$

D'altra parte, indicando con $\overline{\mathbf{A}}$ l'accelerazione dal centro di massa del corpo naturale, al considerato istante, si ha, per § 40,

$$\mathbf{R} = m \overline{\mathbf{A}} : \tag{2}$$

vale a dire la forza motrice può anche essere definita come prodotto della massa del corpo naturale per l'accelerazione del suo centro di massa.

§ 42. — Immaginiamo il corpo naturale decomposto in parti, e indichiamo con τ_r il campo rappresentante la parte generica, con $\mathbf{R}_r$ la forza motrice competente, secondo (1), alla stessa parte.

Per (1), abbiamo, senz'altro,

$$\mathbf{R} = \sum_r \int_{\tau_r} k \mathbf{A}_{\mathrm{P}} d\tau_r = \sum_r \mathbf{R}_r \,. \tag{3}$$

Proprietà generali della forza motrice.

§ 43. — Leggendo (3) del precedente §, e valendoci della definizione della forza motrice (§ 41), per descrivere le proprietà dell'accelerazione dei corpi naturali, conformemente ai relativi postulati (§§ 30, 31), otteniamo immediatamente le proposizioni seguenti:

I. La forza motrice di un corpo naturale, ad ogni istante, è la somma delle forze motrici, che competono alle singole parti, in cui il corpo naturale, in un modo qualsivoglia, s'immagini decomposto.

II. *a)* (Legge dell'eguaglianza dell'azione e della reazione). Le forze motrici di due corpi naturali, supposti isolati l'uno coll'altro, ad ogni istante, hanno egual grandezza e direzione e senso contrario.

b) La forza motrice di un corpo naturale, supposto isolato con un altro, ad ogni istante, è determinata, per ogni condizione fisica del corpo, dalla sua posizione rispetto all'altro.

III. (Legge del parallelogrammo delle forze).

a) La forza motrice di un corpo, supposto isolato con due o più altri, ad ogni istante, è la somma delle forze motrici che gli competono, quando si supponga isolato con ciascuno di essi, separatamente, la posizione relativa restando la stessa.

b) La forza motrice di un corpo, supposto isolato con un altro, nell'ipotesi che la sua condizione fisica rappresenti l'accumulazione di due o più altre, è la somma delle forze motrici che competono al corpo colle singole condizioni fisiche, separatamente.

§ 44. — La proprietà I corrisponde ad analoga proprietà della massa, e non trova riscontro fra quelle della accelerazione. La proprietà II *(a)* riproduce la corrispondente proprietà dell'accelerazione in più perspicua e comoda forma. Le proprietà seguenti si trasportano intatte dall'accelerazione alla forza motrice.

Si presume già da questo il partito che la teoria del movimento potrà ricavare dal riunire, al modo indicato, le due quantità massa e accelerazione, per formare la nuova quantità, chiamata forza motrice.

Vedremo, in seguito, che con una forza motrice si rappresenta il peso dei corpi in prossimità della superficie terrestre: donde

emerge la parentela fra la forza motrice, col significato generale della teoria del movimento, e la forza motrice, col significato con cui è ordinariamente adoperato nella Pratica. Per quanto poi a rappresentare con una quantità matematicamente definita la forza, o lo sforzo, inteso col significato intuitivo o famigliare, si possono ripetere le considerazioni d'ordine pregiudiziale, che abbiamo fatto a proposito della massa e della quantità di materia, coi due distinti significati. Si può ben riconoscere che, quantunque l'accelerazione di un corpo naturale traduca già l'effetto dell'azione dei corpi naturali circostanti, la forza motrice corrisponde meglio al concetto intuitivo dell'espressione di codesta azione, includendo la quantità della materia agita, come fattore. Ma sta il fatto che il privilegio accordato al prodotto della massa per l'accelerazione di recare il nome di forza motrice, in confronto d'altre combinazioni, che si potrebbero egualmente formare coi varii elementi del movimento dei corpi naturali, e con quegli stessi due elementi, in altro modo, ha il suo essenziale fondamento nelle proprietà che risultano al prodotto medesimo. Per le quali, esso si presenta spontaneamente, come cospicuo strumento di ricerca, nelle questioni attinenti alla mutua azione dei corpi naturali, collo scopo, più volte accennato, di un corrispondente studio del mondo concreto.

Conseguenze immediate.

§ 45. — La forza motrice di un corpo naturale, in un intervallo di tempo, sia nulla. Tale è il caso di un corpo naturale, nello stesso intervallo di tempo, isolato da tutti gli altri, ossia delle parti, in cui il corpo, in qualunque modo, s'immagini decomposto, isolate fra loro. Difatti, immaginando il corpo decomposto in due parti, la sua forza motrice sarà la somma delle forze motrici delle due parti (§ 43, I), e codeste avranno egual grandezza e direzione e senso opposto (§ 43, II *a)*).

Per (2) del § 41, sarà, nello stesso intervallo di tempo,

$$\bar{\mathbf{A}} = 0.$$

Quindi, intendendo per punto in quiete un punto che serba invariata, al variar del tempo, la propria posizione, troviamo che il centro di massa di un corpo naturale, la cui forza motrice, in un intervallo di tempo, è nulla, o sarà in quiete o avrà movimento rettilineo uniforme.

Così, il principio classico dell'inerzia, o la prima legge newtoniana del movimento [1]), trova, col nostro procedimento, questa interpretazione che il centro di massa di un corpo naturale sarà in quiete o avrà movimento rettilineo uniforme, finchè non intervenga un altro corpo naturale, capace di determinare nel corpo naturale considerato, in ragione della posizione relativa, e della condizione fisica, una forza motrice non nulla.

§ 46. — La forza motrice di un corpo naturale, in un intervallo di tempo, sia costante. Tale è intanto il caso di un corpo naturale, in presenza di un altro, nell'ipotesi che la forza motrice determinata in esso da codesto non muti sensibilmente col mutare della posizione relativa dei due corpi, entro lo stesso intervallo di tempo.

Indicando con $\mathbf{R}$ la forza motrice, con $\bar{\mathbf{A}}$ l'accelerazione del centro di massa, con $\bar{\mathbf{V}}_0$ la sua velocità al tempo t_0, con $\bar{\mathrm{P}}_0$ e $\bar{\mathrm{P}}$ le sue posizioni al tempo t_0 e al tempo t, abbiamo nella suddetta ipotesi,

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{d^2(\bar{\mathrm{P}}-\bar{\mathrm{P}}_0)}{dt^2} = \frac{\mathbf{R}}{m} = \text{costante}:$$

[1]) Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare. (NEWTON, *Phil. Nat. Princ. Math. Axiomata sive Leges Motus. Lex* I).

donde, integrando,

$$\overline{P}-\overline{P}_0 = \overline{V}_0 (t-t_0) + \frac{1}{2} \overline{A} (t-t_0)^2 . \tag{1}$$

Ora, $\overline{V}_0 (t-t_0)$ è lo spostamento fra il tempo t_0 e il tempo t di un punto il cui movimento è rettilineo uniforme colla velocità $\overline{V}_0$. Tale è il movimento del centro di massa, nell'ipotesi che gli sia attribuita al tempo t_0 la supposta velocità $\overline{V}_0$, e la forza motrice nell'intervallo di tempo sia nulla (§ 45).

Alla sua volta, $\frac{1}{2} \overline{A} (t-t_0)^2$ è lo spostamento fra il tempo t_0 e il tempo t di un punto il cui movimento è rettilineo uniformemente accelerato con accelerazione $\overline{A}$. Tale, conformemente alla stessa (1), è il movimento del centro di massa, nell'ipotesi che la sua velocità al tempo t_0 sia nulla, e la forza motrice, nell'intervallo di tempo, sia la supposta.

La velocità $\overline{V}_0$, al *tempo iniziale* t_0, e la forza motrice $\mathbf{R}$, nell'intervallo di tempo considerato, rappresentano, insieme colla posizione $\overline{P}_0$ al tempo suddetto t_0, le circostanze determinatrici del movimento del punto $\overline{P}$, nello stesso intervallo di tempo. Indichiamo, per un momento, il valor zero di $\overline{V}_0$ o di $\mathbf{R}$ col termine *mancanza,* e il valore diverso da zero delle stesse $\overline{V}_0$ o $\mathbf{R}$ col termine *sussistenza* delle relative circostanze del movimento. Allora la (1) si presta a questa interpretazione che lo spostamento dalla posizione iniziale alla posizione al tempo generico, $\overline{P}-\overline{P}_0$, nel movimento determinato dalle due circostanze insieme sussistenti, cioè nel movimento effettivo, si consegue, attribuendo al punto, successivamente, in un ordine qualunque, gli spostamenti separatamente determinati dalla sussistenza di ciascuna delle due circostanze, colla mancanza dell'altra.

Rammentando i principii del movimento relativo ad una terna di assi mobili considerati come fissi in una loro posizione, la (1) si può leggere anche così: il movimento del punto $\overline{P}$, determinato

dalla simultanea sussistenza delle due circostanze, velocità $\overline{\mathbf{V}}_0$ al tempo t_0, e forza motrice $\mathbf{R}$ nell'intervallo di tempo considerato, è tale che il corrispondente movimento relativo ad una terna d'assi coordinati in movimento traslatorio, definito col movimento del punto $\overline{\mathrm{P}}$, che è determinato dalla sussistenza di una delle due circostanze, colla mancanza dell'altra, riesce il movimento dello stesso punto, che è determinato da codesta seconda circostanza, colla mancanza della prima.

§ 47. — La forza motrice di un corpo naturale, in un intervallo di tempo, sia la somma di due o più forze motrici costanti, attribuite allo stesso corpo naturale. Cioè, indicando con $\mathbf{R}$ e con $\mathbf{R}_r$ $(r=1,2,\ldots\nu)$ la prima forza motrice nominata e le altre, sia

$$\mathbf{R}=\sum_r \mathbf{R}_r\,. \tag{2}$$

Questa ipotesi corrisponde alla condizione di fatto che un corpo concreto sia isolato con due o più altri, tali che ogni coppia formata, isolando il corpo con ciascuno di questi altri, soddisfa le condizioni indicate nel § precedente.

Poniamo

$$\overline{\mathbf{A}}=\frac{\mathbf{R}}{m}\,, \qquad \overline{\mathbf{A}}_r=\frac{\mathbf{R}_r}{m} \quad (r=1,2,\ldots\nu):$$

$\overline{\mathbf{A}}$ rappresenterà, come prima, l'accelerazione del centro di massa $\overline{\mathrm{P}}$ nel movimento effettivo del corpo, e $\overline{\mathbf{A}}_r$ l'accelerazione dello stesso centro di massa nel movimento del corpo, determinato dalla forza motrice parziale $\mathbf{R}_r$, le altre parziali essendo supposte nulle.

Si verificherà (1), nella quale introducendo (2), si ha

$$\overline{\mathrm{P}}-\overline{\mathrm{P}}_0=\overline{\mathbf{V}}_0(t-t_0)+\sum_r \frac{1}{2}\,\overline{\mathbf{A}}_r(t-t_0)^2. \tag{3}$$

E questa formola si presta a interpretazioni affatto simili a quelle che abbiamo indicato per la (1).

§ 48. — Osserviamo ora che le formole (1) e (3) hanno una più larga base di quella che sembra loro derivare dall'ipotesi che **R** e le $\mathbf{R}_r$ sono costanti. Difatti esse sussistono per **R** e $\mathbf{R}_r$ quali si vogliano, pur d'intendere l'intervallo di tempo $t-t_0$ infinitesimale, e omesso nello sviluppo di $t-t_0$ l'aggiunta dei termini di ordine superiore al secondo. E poichè t_0 rappresenta un tempo qualunque del considerato intervallo, esse valgono ancora per un intorno infinitesimale di un istante qualunque del movimento. Così, le indicate interpretazioni di queste formole si possono estendere al movimento determinato da forze motrici quali si vogliano, pur di considerare, per ogni istante, un intorno infinitesimale di valori del tempo, e accordare l'approssimazione suddetta. Si ottiene pertanto il così detto principio della composizione dei movimenti, la cui scoperta è opera di Galileo [1]).

§ 49. — Non sarà inutile fissare l'attenzione sul seguente risultato, che riconduce allo spostamento del centro di massa la ipotesi dell'esistenza di una data forza motrice, o che sia l'effettiva, o che sia la parziale, corrispondente ad una parte delle circostanze che determinano la forza motrice effettiva, cioè corpi naturali in presenza del corpo naturale considerato e condizioni fisiche.

---

[1]) *Dialoghi delle nuove scienze.* Giornata IV.

« La théorie des mouvements variés et des forces accélératrices qui les produisent, est fondée sur ces lois générales, que tout mouvement imprimé à un corps est par sa nature uniforme et rectiligne, et que differents mouvements, imprimés à la fois ou successivement à un même corps, se composent de manière que le corps se trouve à chaque instant dans le même point de l'espace où il devrait se trouver en effet par la combinaison de ces mouvements, s'ils existaient chacun réellement et séparément dans le corps. C'est dans ces deux lois que consistent les Principes connus de la force d'inertie et du mouvement composé. Galilée a aperçu le premier ces deux principes ... »

(LAGRANGE. *Mécanique Analytique,* Seconde Partie, Section Première).

Indicando con $\mathbf{R}^*$ una forza motrice, attribuita ad un corpo naturale, di massa indicata da m, al tempo t, e con $t+\mathrm{D}t$ il tempo generico di un intorno infinitesimale di t, codesta forza motrice, o che sia l'effettiva, appartenente al considerato movimento del corpo naturale, o che sia una forza motrice parziale, corrispondente ad alcune delle circostanze, che, col loro insieme, determinano la forza motrice effettiva — corpi naturali in presenza e condizioni fisiche — introduce nell'espressione dello spostamento effettivo del centro di massa del corpo fra t e $t+\mathrm{D}t$, in forma di sviluppo secondo le potenze di $\mathrm{D}t$, il termine

$$\frac{1}{2}\frac{\mathbf{R}^*}{m}\mathrm{D}t^2.$$

Quantità di moto di un corpo naturale [1]).

§ 50. — " Quantità di moto „ di un corpo naturale, ad un istante, chiamiamo il vettore definito da

$$\mathbf{Q}=\int_\tau k\,\mathbf{V}_\mathrm{P}\,d\tau. \tag{1}$$

Indicando con $\overline{\mathbf{V}}$ la velocità del centro di massa al tempo t, abbiamo

$$\overline{\mathbf{V}}=\frac{d(\overline{\mathrm{P}}-\mathrm{O})}{dt}=\frac{\int_\tau k\,\frac{d(\mathrm{P}-\mathrm{O})}{dt}\,d\tau}{m}=\frac{\int_\tau k\,\mathbf{V}_\mathrm{P}\,d\tau}{m}.$$

Quindi anche

$$\mathbf{Q}=m\,\overline{\mathbf{V}}; \tag{2}$$

vale a dire la quantità di moto può pure essere definita come

---

[1]) Quantitas motus est mensura ejusdem orta ex velocitate et quantitate materiae conjunctim. (NEWTON. *Phil. Nat. Princ. Math. Definitio* II).

prodotto della massa del corpo naturale per la velocità del suo centro di massa, al considerato istante.

§ 51. — Immaginiamo il corpo naturale decomposto in parti, e indichiamo, al solito, con τ_r il campo rappresentante la parte generica, e con $\mathbf{Q}_r$ la quantità di moto competente, secondo (1), alla stessa parte. Per (1), abbiamo

$$Q = \sum_r \int_{\tau_r} k \, \mathbf{V}_P \, d\tau_r = \sum_r \mathbf{Q}_r \, . \tag{3}$$

Quindi, la quantità di moto di un corpo naturale, ad ogni istante, è la somma delle quantità di moto che competono, allo stesso istante, alle singole parti in cui il corpo naturale, in un modo qualsivoglia, s'immagini decomposto.

Forza motrice nel movimento relativo.

§ 52. — Consideriamo, insieme col movimento assoluto di un corpo naturale, cioè insieme col movimento corrispondente alle sue posizioni assolute (§ 1), il movimento relativo ad una terna d'assi mobili considerati come fissi in una posizione da assegnarsi a seconda del caso.

Pel teorema di Coriolis, abbiamo, ad ogni istante, per ogni punto P del corpo naturale [1]),

$$\mathbf{A}_P = \mathbf{A}_{R,P} + \mathbf{A}_{S,P} - 2 \, \mathbf{V}_{R,P} \wedge \omega \, , \tag{1}$$

dove $\mathbf{A}_P$ indica, come prima, l'accelerazione nel movimento assoluto, $\mathbf{A}_{R,P}$ e $\mathbf{V}_{R,P}$ l'accelerazione e la velocità nel movimento relativo agli assi mobili, considerati come fissi colla loro orientazione al supposto istante, $\mathbf{A}_{S,P}$ l'accelerazione nel movimento di

---

[1]) Cfr. la nota a piedi di pag. 15.

trascinamento competente allo stesso istante, ω la velocità angolare della terna degli assi mobili.

Quindi, moltiplicando i due membri di (1) per k, densità, al supposto istante, nel punto P, e integrando nel campo τ, rappresentante il corpo naturale a detto istante,

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_R + \mathbf{R}_s - 2\,\mathbf{Q}_R \wedge \omega\,, \tag{2}$$

dove

$$\mathbf{R} = \int_\tau k\,\mathbf{A}_P\,d\tau,\ \mathbf{R}_R = \int_\tau k\,\mathbf{A}_{P,R}\,d\tau,\ \mathbf{R}_S = \int_\tau k\,\mathbf{A}_{P,S}\,d\tau\,,\ \mathbf{Q}_R = \int_\tau k\,\mathbf{V}_{P,R}\,d\tau\,. \tag{3}$$

$\mathbf{R}$ rappresenta la forza motrice del movimento assoluto. I vettori $\mathbf{R}_R$, $\mathbf{R}_S$ e $2\,\mathbf{Q}_R \wedge \omega$, competenti alla stessa unità di misura $[l m t^{-2}]$ di forza motrice, e i primi due formati con $\mathbf{A}_{R,P}$ e $\mathbf{A}_{S,P}$ come $\mathbf{R}$ con $\mathbf{A}_P$, si chiamano rispettivamente la forza motrice del movimento relativo agli assi mobili considerati come fissi colla orientazione al supposto istante, la forza motrice del movimento di trascinamento competente allo stesso istante, la forza motrice centrifuga composta. $\mathbf{Q}_R$ rappresenta la quantità di moto nel movimento relativo agli assi mobili suddetto (§ 50).

Da (2) si ricava

$$\mathbf{R}_R = \mathbf{R} - \mathbf{R}_S + 2\,\mathbf{Q}_R \wedge \omega\,. \tag{4}$$

Le formole (2) e (4) traducono il teorema di Coriolis, applicato alla forza motrice.

§ 53. — Conformemente a (4), i vettori $-\mathbf{R}_S$ e $2\,\mathbf{Q}_R \wedge \omega$ si chiamano “forze motrici apparenti del movimento relativo„. Codesto, per la ragione che essi introducono, ciascuno, un termine nella composizione di $\mathbf{R}_R$, come, per avventura, nella composizione di $\mathbf{R}$, le singole forze motrici parziali, corrispondenti alle varie circostanze determinatrici della stessa $\mathbf{R}$, quali sono i varii corpi in

presenza e le varie condizioni fisiche. Per modo che essi sono paragonabili, per gli effetti, a dette forze motrici parziali: ma si chiamano apparenti, perchè traducono circostanze che non compariscono se non in quanto si considera un "movimento apparente".

§ 54. — Nell'ipotesi che gli assi siano in movimento traslatorio, indicando $\mathbf{A}_S$ l'accelerazione di un punto qualunque invariabilmente unito agli assi mobili, — "accelerazione di trascinamento, al considerato istante" — si ha

$$\mathbf{A}_{S,P} = \mathbf{A}_S :$$

quindi

$$\mathbf{R}_S = \int_\tau k\,\mathbf{A}_{S,P}\,d\tau = m\,\mathbf{A}_S .$$

Inoltre, nello stesso caso, è $\omega = 0$. Per cui le formole (2) e (4) si riducono a

$$(2)' \qquad \mathbf{R} = \mathbf{R}_R + m\,\mathbf{A}_S \qquad\qquad (4)' \qquad \mathbf{R}_R = \mathbf{R} - m\,\mathbf{A}_S .$$

E notisi ancora che $\mathbf{R}_R$ si può semplicemente definire come "forza motrice del movimento relativo agli assi mobili considerati come fissi", senz'altro, (intendendo, fissi colla loro propria orientazione costante).

Supposto poi il movimento degli assi traslatorio rettilineo uniforme, si ha $\mathbf{A}_S = 0$. Quindi

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_R .$$

La forza motrice è, in questo caso cospicuo, la stessa nel movimento relativo agli assi mobili, come nel movimento assoluto.

§ 55. — Nell'ipotesi che il movimento degli assi sia rotatorio uniforme, $-\mathbf{A}_{S,P}$ diventa la "accelerazione centrifuga". L'orien-

tazione di questo vettore è quella della perpendicolare all'asse di rotazione passante per P, volta verso P, e la sua grandezza $\rho\omega^2$, designando con ρ la grandezza della distanza di P dall'asse di rotazione, e con ω^2 il quadrato scalare (quadrato della grandezza) della velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$. Si ha quindi, indicando con $\mathbf{V}_{S,P}$ la velocità del punto P nel suo movimento di trascinamento competente al considerato istante [1],

$$-\mathbf{A}_{S,P} = \mathbf{V}_{S,P} \wedge \boldsymbol{\omega}.$$

Ne viene

$$-\mathbf{R}_S = -\int_\tau k\, \mathbf{A}_{S,P}\, d\tau = \int_\tau k\, \mathbf{V}_{S,P} d\tau \wedge \boldsymbol{\omega}.$$

Ma, indicando con $\overline{\mathbf{V}}_S$ la velocità del centro di massa, nel suo movimento di trascinamento competente allo stesso istante, si ha

$$\int_\tau k\, \mathbf{V}_{S,P}\, d\tau = m \overline{\mathbf{V}}_S.$$

Quindi

$$-\mathbf{R}_S = m \overline{\mathbf{V}}_S \wedge \boldsymbol{\omega}. \tag{5}$$

La forza motrice apparente $-\mathbf{R}_S$ si chiama, in questo caso, "forza motrice centrifuga": la sua orientazione riesce quella della perpendicolare all'asse di rotazione passante pel centro di massa, volta verso il centro di massa, e la sua grandezza $\overline{\rho}\omega^2$, denotando $\overline{\rho}$ la grandezza della distanza del centro di massa dall'asse di rotazione, al supposto istante.

---

[1] Rammentisi che si ha, alla sua volta, indicando con O un punto dell'asse di rotazione,

$$\mathbf{V}_{S,P} = \boldsymbol{\omega} \wedge (P-O).$$

Si ha così, nell'ipotesi che il movimento degli assi sia rotatorio uniforme, introducendo l'eguaglianza (§ 50)

$$\mathbf{Q}_{R} = m \overline{\mathbf{V}}_{R} ,$$

la forma speciale della relazione (4)

$$\mathbf{R}_{R} = \mathbf{R} + m \overline{\mathbf{V}}_{S} \wedge \omega + 2m \mathbf{V}_{R} \wedge \omega . \tag{6}$$

Conformemente al § 49, le due forze motrici apparenti, forza motrice centrifuga e forza motrice centrifuga composta, introducono nella formazione dello spostamento elementare del centro di massa fra il tempo t e il tempo $t + Dt$, appartenente al movimento relativo degli assi mobili considerati come fissi nella loro posizione al tempo t, i due termini

$$\frac{1}{2} m \overline{\mathbf{V}}_{S} \wedge \omega Dt^2 , \qquad m \overline{\mathbf{V}}_{R} \wedge \omega Dt^2 ,$$

il primo, rappresentante un distacco normale del centro di massa dall'asse di rotazione, e il secondo, un distacco dello stesso centro di massa normale al piano dell'asse di rotazione e della velocità $\mathbf{V}_{R}$. I quali distacchi non compariscono, se non in quanto lo spostamento in discorso appartiene ad un movimento apparente, giudicato, prescindendo dal movimento degli assi fra il tempo t e il tempo $t + Dt$.

Applicazioni e deduzioni relative al movimento per gravità, studiato in prima approssimazione.

§ 56. — "Movimento per gravità" o "movimento dei gravi" si chiama in Fisica il movimento che presentano i corpi in prossimità della superficie terrestre, o abbandonati, o scagliati, inteso che la loro condizione fisica sia il così detto stato naturale, cioè che essi non siano magnetizzati, nè rechino cariche elettrostatiche, nè trasportino correnti elettriche ecc.: che il movimento

si compia entro un contorno la cui massima corda è piccolissima in confronto del raggio terrestre: che, infine, o, con particolari artifizii, sia rimossa da quel contorno l'aria atmosferica, o la qualità e la forma dei corpi e le condizioni iniziali siano tali da poter sensibilmente prescindere dall'influenza dell'aria atmosferica. Questa influenza si manifesta colla pressione idrostatica e colla resistenza al movimento; la stessa esperienza fornisce agevolmente criterii, per decidere del caso in cui si può prescindere, come facciamo in seguito, d'ambedue.

Chiamiamo poi prima approssimazione dello studio del movimento per gravità quello che si arresta alle deduzioni dell'osservazione comune, e degli esperimenti eseguiti col piano inclinato di Galileo, colla macchina d'Atwood, e simili apparecchi.

Tali deduzioni si riassumono in questa proposizione sperimentale che, nelle indicate condizioni, un corpo abbandonato a sè stesso, — cioè, ad un istante, nel quale la velocità di tutti i suoi punti è nulla, libero di muoversi — si muove infatti di movimento traslatorio rettilineo uniformemente accelerato, colla direzione della "verticale del luogo", il senso dall'alto in basso, e grandezza dell'accelerazione eguale per tutti i corpi, rappresentata approssimativamente da

$$g = 9{,}8 \quad \left[\frac{\text{metro}}{\text{secondo}^2}\right]. \tag{1}$$

Ragioniamo ora sui corpi concreti come su corpi naturali della teoria matematica, salvo rilevare, a tempo e luogo, l'accordo delle deduzioni della teoria coi risultati dell'esperienza.

Apparterrà al corpo, conformemente al suddetto movimento, una forza motrice, avente la direzione della verticale del luogo, il senso dall'alto al basso, e grandezza mg, dove g è invariabile col corpo, per modo che la stessa grandezza risulta proporzionale alla massa del corpo.

Ora, il suddetto movimento è movimento relativo ad una terna d'assi invariabilmente uniti al globo terrestre: il cui momento si può considerare come composto del movimento annuo — movimento traslatorio, conforme al movimento del centro dello stesso globo terrestre — e del movimento diurno — movimento rotatorio uniforme, coll'asse passante pel centro del globo, e grandezza della velocità angolare rappresentata da

$$(2) \qquad \omega = \frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60} \qquad \left[\frac{1}{\text{secondo}}\right].$$

La suddetta forza motrice sarà dunque la somma della forza motrice assoluta, determinata dai corpi in presenza del corpo considerato e loro condizione fisica, e delle forze motrici apparenti del movimento relativo (§§ 52, 53). Ma il contributo a $-\mathbf{R}_8$ (§ 53) del movimento annuo va considerato come affatto inapprezzabile, confondendosi quel movimento, anche per un tempo assai lungo, in confronto di quello che dura il movimento di un grave, con un movimento rettilineo uniforme. E, per quanto alle forze motrici apparenti, corrispondenti al movimento diurno — forza motrice centrifuga e forza motrice centrifuga composta, di grandezza rispettivamente proporzionale e ω^2 e ω (§ 55) — vanno reputate, per la piccolezza di ω, secondo (2), abbondantemente comprese nei limiti degli errori d'osservazione, attinenti al supposto ordine di approssimazione, e, per conseguenza, colla stessa approssimazione, trascurabili.

Ne concludiamo che la suddetta forza motrice si può considerare come quella che è determinata nel corpo considerato dai corpi in presenza. Codesti si possono distinguere in globo terrestre e corpi celesti. Ora, pel fatto rammentato che il movimento annuo si confonde sensibilmente, in un tempo abbastanza lungo, con un movimento rettilineo uniforme, il centro di massa della terra, nello stesso tempo, può considerarsi come in movimento

rettilineo uniforme, e cioè la terra come un corpo naturale isolato, (§ 45), o infine come insensibile il contributo dei corpi celesti nella formazione della forza motrice del globo terrestre e delle singole sue parti.

In conclusione, nei limiti della supposta approssimazione, possiamo considerare la forza motrice precedentemente definita, rappresentata da

$$\mathbf{R} = m\mathbf{g}, \tag{3}$$

— dove $\mathbf{g}$ dinota il vettore avente l'orientazione della verticale del luogo, volta in basso, e grandezza g, data da (1) — come quella che è determinata nel corpo considerato, inteso allo stato naturale, dalla presenza del globo terrestre, colla condizione che non si verifichi contatto fra lo stesso corpo e il globo terrestre.

Così, $\mathbf{R}$ rappresenta la forza motrice di un corpo naturale, nella condizione fisica chiamata stato naturale, concepito isolato col globo terrestre, colla condizione della mancanza del contatto fra esso e il globo, e la riserva che al movimento del corpo non sia accordato che uno spazio, prossimo alla superficie terrestre, compreso entro un contorno la cui massima corda è assai piccola in confronto del raggio terrestre.

§ 57. — Abbiamo dedotto $\mathbf{R}$ dal movimento corrispondente all'ipotesi che ad un istante la velocità di tutti i punti del corpo sia nulla. Ammessi i nostri principii, la stessa forza motrice, purchè si verifichino le precedenti condizioni e riserve, dovrà reputarsi appartenere al corpo anche con ipotesi sulla velocità dei punti del corpo, ad un istante, diversa da quella. .

Supponiamo la velocità $\overline{\mathbf{V}}_0$ del centro di massa del corpo, al tempo t_0, qualsivoglia, e indichiamo, come altra volta, con $\overline{\mathrm{P}}$ e con $\overline{\mathrm{P}}_0$ il posto del centro di massa al tempo generico t e al

tempo t_0. Troviamo

$$\overline{P} - \overline{P_0} = \overline{V}_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} \overline{g} \, (t - t_0)^2 :$$

vale a dire ci risulta che il movimento del centro di massa sarà, in generale, parabolico, e, in particolare, quando $\overline{V}_0$ sia nullo o parallelo alla verticale, rettilineo uniformemente accelerato, con una fase di movimento più precisamente detto uniformemente ritardato, che comincia col tempo t_0, quando il senso di $\overline{V}_0$ volge dal basso in alto.

Notoriamente, queste deduzioni concordano coi risultati dell'esperienza.

§ 58. — Immaginando mutate rispetto al globo terrestre la posizione del campo assegnato al movimento del corpo considerato, muta, in generale, manifestamente, colla verticale, la direzione della forza motrice $\mathbf{R}$. Osservazioni debitamente accurate permettono di constatare anche una corrispondente variazione della grandezza dell'accelerazione del movimento, e, quindi, per ogni corpo, della grandezza della stessa forza motrice. I quali risultati dell'esperienza sono conformi alla proprietà (§ 43, II *a)*) attribuita alla forza motrice di un corpo, isolato con un altro, di essere determinata dalla posizione relativa dei due corpi.

§ 59. — Introduciamo ora la considerazione del fatto sperimentale che la caduta di un grave può essere impedita mediante un sostegno. Viene allora a competere ad ogni punto del corpo velocità costantemente nulla, e quindi accelerazione nulla ad ogni istante, egualmente, ad ogni punto del corpo, e forza motrice nulla ad ogni istante, al corpo considerato.

D'altra parte, distinguendo, rispetto all'azione sullo stesso corpo considerato, il globo terrestre, dal quale s'immagini separato

il corpo che funge da sostegno, e questo corpo — ciò che è conforme al risultato dell' esperienza, anche con un ordine di approssimazione assai maggiore del supposto — detta forza motrice, secondo i principii della teoria (§ 43 III *a)*), sarà la somma delle forze motrici determinate nel corpo, a parità di posizione relativa, dal globo terrestre, colla condizione della mancanza del contatto, e dal sostegno. Per modo che la forza motrice determinata separatamente dal sostegno sarà la eguale ed opposta di senso alla precedente **R**.

Ora, la forza motrice — **R** riuscendo così prestabilita, essa dovrà corrispondere, secondo gli stessi principii della teoria (§ 43, II *b)*) ad una determinata posizione relativa del corpo considerato e del sostegno. E questo principio risulta verificato dall'esperienza, la quale, almeno con certe qualità di corpi formanti il sostegno, che meglio si prestano all' osservazione, constata che il sostegno regge o sostiene il grave, in quanto assume una determinata configurazione, variabile a seconda del grave. Tale è il caso di un filo elastico, che fissato per un capo, si stira o più o meno, reggendo un grave, sospeso all' altro capo: o di una molla, parimente fissata ad un estremo, e caricata di un grave all' altro, che si schiaccia più o meno, quando il grave vi è appoggiato superiormente, e si distende più o meno, se esso vi è attaccato inferiormente.

Quando poi da sostegno funge il nostro braccio, la particolare configurazione, che debbono assumere i muscoli e il resto, per determinare nel carico la necessaria forza motrice, va accompagnata da una particolare sensazione di maggiore o minore stiramento, a seconda del carico medesimo.

E in tal modo si riconosce come la forza motrice, introdotta da principio come elemento del movimento libero dei gravi, possa rendersi direttamente sensibile alla vista e al tatto, per mezzo di ciò che, nel linguaggio comune, si chiama uno “sforzo„,

o che questo si giudichi dalla deformazione di un oggetto, che vi si concepisce sottoposto, o che, intendendolo applicato alla nostra persona, si giudichi dallo sforzo che noi dobbiamo esercitare per sostenerlo.

Ora, sotto tali aspetti, la forza motrice in discorso ci rappresenta quella proprietà dei corpi terrestri, che, parimente nel linguaggio comune, si chiama il loro peso: donde i nomi di corpi pesanti e gravi, e di gravità.

Si trasporta quindi il nome di "peso" alla forza motrice dei corpi naturali, che figura nel suddetto equilibrio relativo ad una terna d'assi invariabilmente uniti al globo terrestre, il cui effetto è eliminato dal sostegno. Col grado di approssimazione da noi supposto in principio, essa si confonde colla forza motrice del corpo, concepito isolato col globo terrestre, colla condizione della mancanza del contatto, e le altre indicate riserve. Col maggior grado di approssimazione che comporta il caso dell'equilibrio, e col quale ci riserbiamo più tardi di applicare la teoria allo studio del movimento dei gravi, il peso è più precisamente la risultante di detta forza motrice e della forza motrice centrifuga (§ 55).

Avvertiamo che, entro il campo ristretto, come è precedentemente supposto, l'accelerazione centrifuga si riconosce subito che riuscirà, entro gli stessi limiti d'approssimazione, sensibilmente invariabile da punto a punto (cfr. § 55): per cui, indicando ora il "peso di un corpo naturale" con $\mathbf{P}$, rimane, analogamente a (3),

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g}, \tag{4}$$

con una nuova $\mathbf{g}$ — che si confonde colla precedente nell'ipotesi di quel primo grado di approssimazione — costante, come quella, entro il campo considerato.

§ 60. — Immaginiamo che le maggiori o minori contrazioni, o distensioni, di una molla, determinate da un carico, come è stato

detto nel precedente §, comandino il movimento di un indice, congiunto colla molla, e scorrevole davanti ad un regolo diviso in parti, secondo una scala qualsivoglia. Immaginiamo ora di prepararci una serie di corpi eguali, per figura e per sostanza. Verificheremo intanto che, caricandone la molla, determinano una stessa indicazione dell'indice. Immaginiamo poi di caricare la molla successivamente di uno di essi, e poi di gruppi di due, di tre, di quattro..., per segnare ogni volta sul regolo la relativa indicazione dell'indice, e assumere queste indicazioni come corrispondenti a pesi, che stanno fra loro nei rapporti dei numeri 1, 2, 3, 4... Completiamo ancora, col noto processo dell'interpolazione, così fatta " graduazione ". L'apparecchio, così " graduato ", ci fornirà poi il risultato, nei limiti dell'approssimazione che comporta, che, prendendo altri corpi, e caricandolo prima separatamente con ciascuno di essi, e poi con tutti insieme, il peso della riunione, desunto dalla eseguita graduazione, riesce eguale alla somma dei pesi dei singoli corpi, desunti dalla graduazione medesima. Risultato conforme alla relazione

$$P = mg, \tag{5}$$

e alla proprietà che alla riunione di più corpi appartiene massa eguale alla somma delle masse dei singoli corpi, ammesse egualmente pei corpi adoperati per la graduazione, e per gli altri corpi suddetti, come pure, ammesso che ad un certo peso, *qualunque sia il corpo,* corrisponda una certa posizione della molla.

L'apparecchio in discorso è ciò che si chiama un " dinamometro ". Noi vediamo come esso possa contribuire a verificare, alla stregua dell'esperienza, le proprietà postulate pel corpo naturale. E vediamo pure come lo stesso apparecchio possa servire a misurare, per due corpi, il rapporto delle grandezze di quella forza motrice che abbiamo chiamato peso, e, in conseguenza della (5), il rapporto delle masse dei corpi medesimi.

Ne consegue pure un modo di misura del peso, che si chiama " statico ", in quanto si fonda sull'equilibrio stabilito fra il peso e un'altra forza motrice: in confronto del modo, fondato direttamente sulla (5), che si chiama " cinetico ". Col secondo la determinazione del peso si riconduce a quella della massa, e viceversa col primo.

Si riconoscerà intanto come i principii dell'esposta teoria colleghino i due modi di misura, e i relativi concetti.

Osservazione. Notiamo infine come il dinamometro potrà servire a rendere sensibile, sotto gli stessi aspetti, e a misurare, per mezzo del confronto col peso, la quantità di forze motrici corrispondenti a diverse circostanze determinatrici: e, per esempio, la forza motrice determinata da una particolare configurazione, o contrazione dei muscoli, che si traduce nel così detto " sforzo muscolare ".

§ 61. — L'ipotesi del globo terrestre, isolato con un corpo che si move liberamente in prossimità della sua superficie, non è suscettibile di alcuna concreta realizzazione. Perciò, dal movimento concertato di un grave e del globo terrestre non si può ricavare alcuna verificazione della legge dell'eguaglianza dell'azione e della reazione (§ 43 II *a)*); ed è superflua l'osservazione che, quando pure si ammettesse realizzata tale ipotesi, nel senso generalmente indicato (§ 32), dovendo, per detta legge, verificarsi l'eguaglianza

$$mg = m'g',$$

dove m' e g' indicano le grandezze della massa e dell'accelerazione del centro di massa del globo terrestre, e dovendosi, d'altra parte, reputare estremamente piccolo il rapporto $m : m'$, la perturbazione del movimento del globo non potrebbe riuscire altrimenti che inapprezzabile.

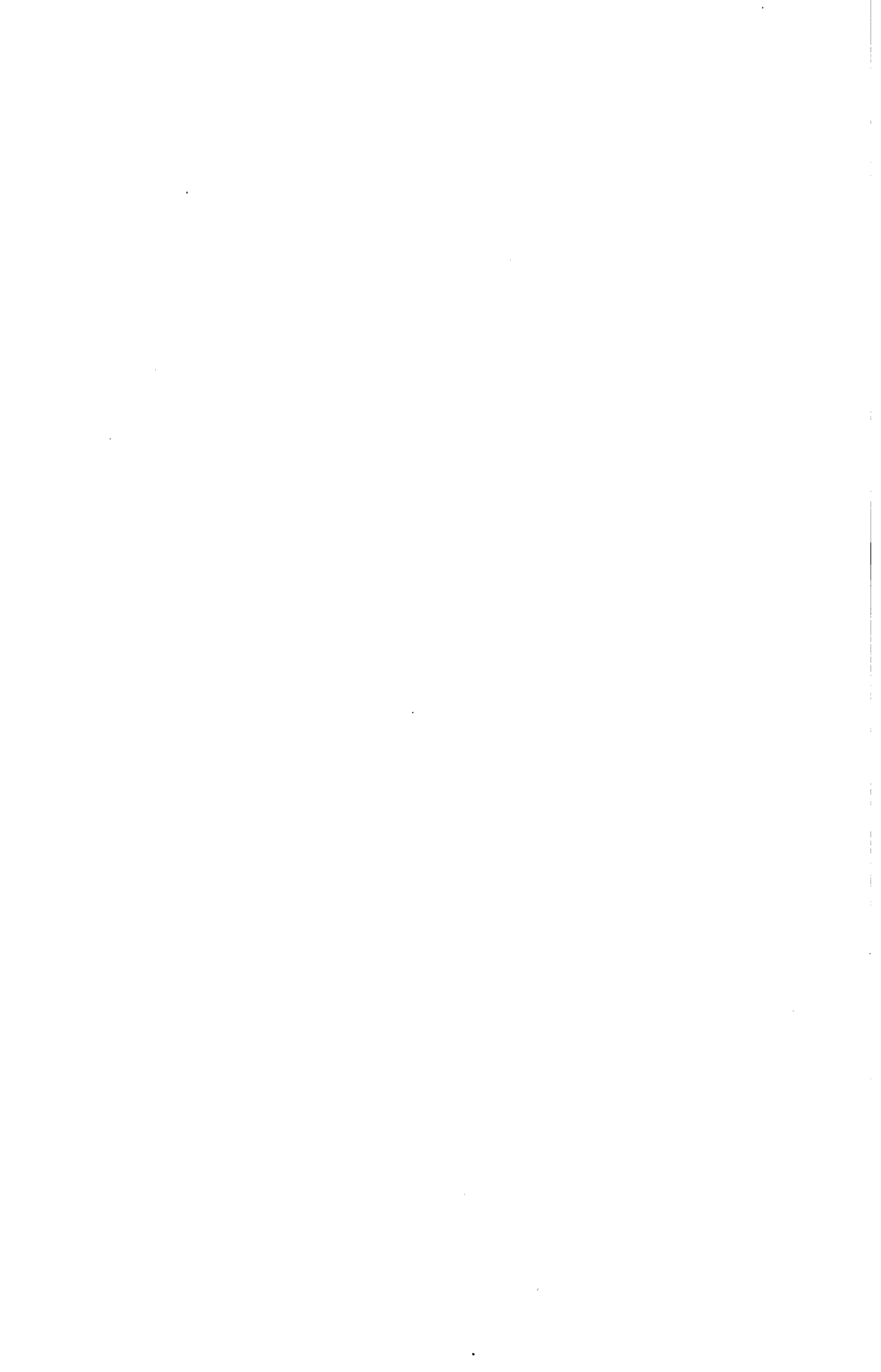
La parte che, nello stesso fenomeno del movimento dei gravi, ha la legge dell'eguaglianza dell'azione e della reazione apparirà dallo svolgimento del capitolo seguente.

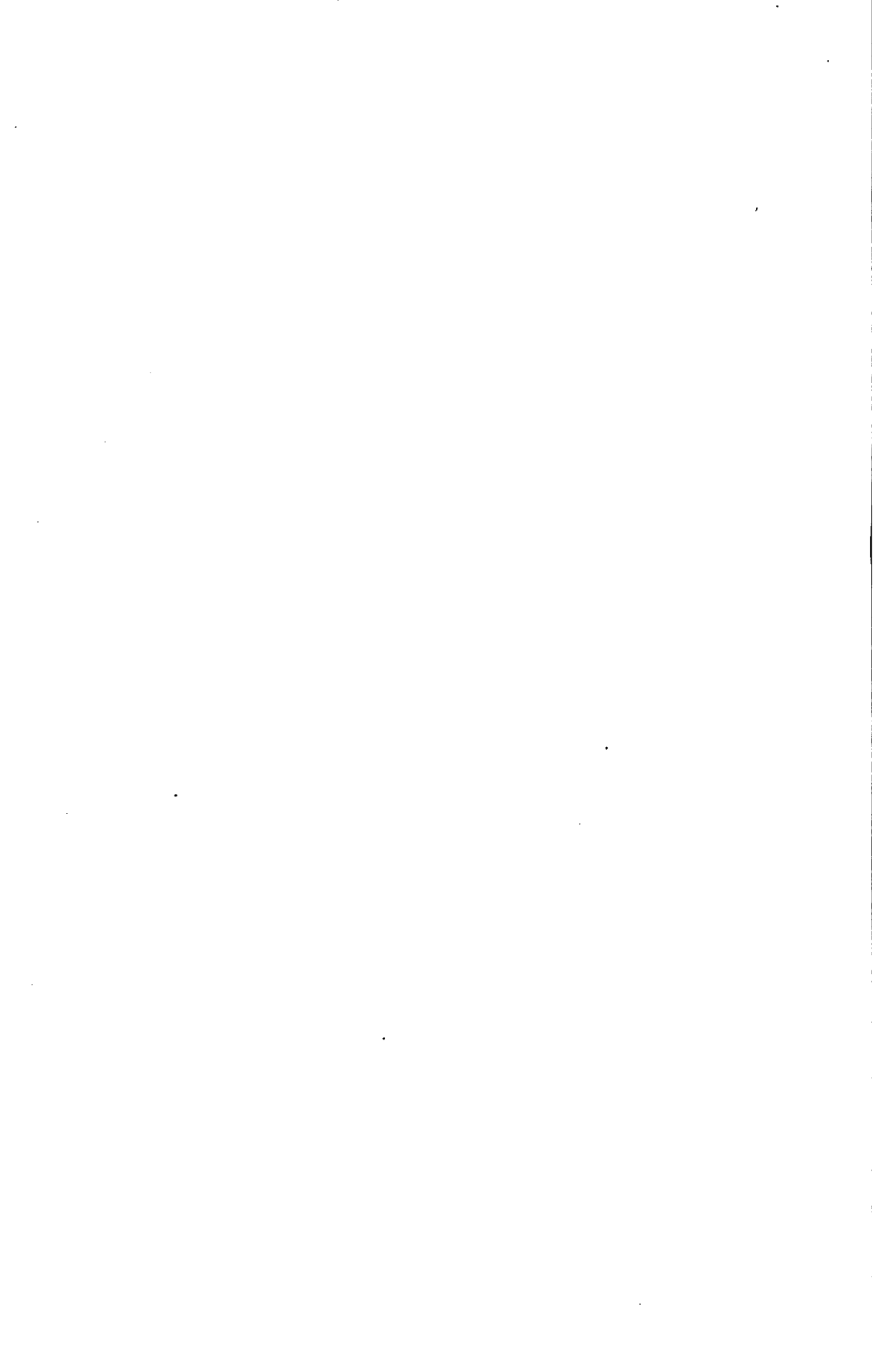
Unità di misura.

§ 62. — Nelle ricerche d'indole teorica, si assume, di regola, come unità di massa, il " grammo ": massa appartenente ad un centimetro cubo d'acqua distillata al massimo di densità. Si assumono poi il centimetro e il secondo di tempo solare medio per unità di lunghezza e di tempo, e si stabilisce in tal modo il così detto sistema di misura Centimetro-Grammo-Secondo, che si indica brevemente con (C. G. S.).

L'unità di forza motrice appartenente a codesto sistema di misura si chiama " dina ".

Nella Pratica si fa spesso uso, come unità di forza motrice, del " chilogrammo-peso ": grandezza del peso, nel supposto luogo, di un decimetro cubo di acqua distillata al massimo di densità. Indicando con g il numero che misura la grandezza dell'accelerazione di gravità, colle unità metro e secondo, pure nel supposto luogo, il chilogrammo-peso, o Kg, riesce rappresentato, nel sistema (C. G. S.), dalla formola

$$\mathrm{Kg} = 10^5 g \text{ dine.}$$

Capitolo Secondo

Teoremi generali della Dinamica

Comune concetto informativo dei teoremi generali della Dinamica.

§ 63. — La forza motrice di un corpo naturale, ad un istante, secondo la definizione (§ 41), è un elemento formato col movimento attuale dello stesso corpo naturale, atto a fornire, nota la massa, l'accelerazione, al relativo istante, del corpo naturale, o, ciò che torna lo stesso, del suo centro di massa. D'altra parte, la stessa forza motrice di un corpo naturale, ad un istante, in conseguenza delle competenti proprietà (§ 43), può concepirsi determinata *a priori* dalle condizioni fisiche, e dalla posizione del corpo considerato rispetto ai corpi supposti in presenza di esso: e con questo essa riesce un elemento formato con ciò che possiamo chiamare le circostanze determinatrici del movimento del mobile. È appunto questo duplice aspetto che conferisce alla forza motrice una particolare efficacia, relativamente al problema principale della Dinamica: quello di dedurre il movimento dei corpi dalle circostanze capaci di determinarlo. S'intende come, a parte la risoluzione completa di questo problema, si potranno fondare su quel duplice aspetto della forza motrice relazioni fra elementi del movimento attuale, da un lato, ed elementi attinenti alle circostanze determinatrici, dall'altro, le quali, più o meno ampiamente, permetteranno di riconoscere le particolarità di un movimento, in quanto è determinato da certe circostanze. Relazioni di questa specie

sono i teoremi generali della Dinamica, dai quali, come principali conclusioni, s'intitola il presente capitolo.

Essi si deducono da un'unica equazione, detta " equazione fondamentale ", che è, alla sua volta, una relazione della stessa specie, valida, in sostanza, per le singole parti infinitesimali di un corpo naturale. Concepito un corpo naturale decomposto comunque in parti, ognuna di esse conta per un corpo naturale, in presenza delle parti rimanenti, e dei corpi con cui si suppone isolato il corpo naturale considerato. Le prime determinano nella parte considerata, che, per stabilire la suddetta equazione, si riduce infinitesimale, le così dette forze motrici interne, i secondi, le forze motrici esterne, sempre conformemente alle supposte condizioni fisiche.

I primi due teoremi eliminano le forze motrici interne. Ed è un loro particolare vantaggio, perchè, nei problemi specifici, riesce, in generale, così arduo assegnare la forma delle forze interne da doversene evitare la difficoltà coll'uso di artifizii, che noi non comprendiamo in questa trattazione [1]. Il terzo teorema abbraccia, di regola, ambedue le specie di forza: ma, oltre l'importanza che possiede tuttavia in tal modo, se ne possono parimente eliminare le forze interne, in casi specialmente interessanti per le applicazioni.

Aggiungiamo ancora che i teoremi in discorso prestano copiosa materia al riconoscimento di quell'accordo fra le deduzioni della teoria e i risultati dell'esperienza, sul quale noi fondiamo la giustificazione degli assunti postulati (cfr. § 32).

Equazione fondamentale.

§ 64. — Supponiamo un corpo naturale isolato in presenza di un numero qualunque d'altri corpi naturali, e accumulate in esso

---

[1]) Attribuiamo lo studio di questi artifizii — vincoli, forze limite e pressioni — a quella parte della Dinamica, che intitoliamo: « Calcolo del movimento. »

un numero pure qualunque di condizioni fisiche. Concepiamolo poi decomposto, in un modo qualsivoglia, in parti, e indichiamo con $\Delta\tau$, Δm e $\Delta \mathbf{R}$ il volume, la massa e la forza motrice della parte generica: τ, m e $\mathbf{R}$ rappresentando le stesse quantità per l'intero corpo. Sarà

$$\Delta \mathbf{R} = \sum\nolimits_1 \Delta \mathbf{R}_e^* + \sum\nolimits_2 \Delta \mathbf{R}_i^* , \tag{1}$$

dove $\Delta \mathbf{R}_e^*$ indica la forza motrice della parte in discorso, concepita, colla condizione fisica generica, isolata col corpo generico in presenza del corpo considerato, e $\Delta \mathbf{R}_i^*$ la forza motrice parimente di detta parte, colla condizione fisica generica, concepita isolata coll'insieme delle parti rimanenti: s'intende, in ambedue i casi, a parità di posizione relativa.

Per (1), si ha ancora

$$\frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta m} = \sum\nolimits_1 \frac{\Delta \mathbf{R}_e^*}{\Delta m} + \sum\nolimits_2 \frac{\Delta \mathbf{R}_i^*}{\Delta m} ,$$

$$\lim \frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta m} = \sum\nolimits_1 \lim \frac{\Delta \mathbf{R}_e^*}{\Delta m} + \sum\nolimits_2 \lim \frac{\Delta \mathbf{R}_i^*}{\Delta m} , \tag{1'}$$

il limite intendendosi preso collo svanire del raggio di una sfera, col centro in un punto della parte, capace di contenere la parte medesima.

Ora, indicando con $\mathbf{A}$ l'accelerazione, al supposto istante, di detto punto, e, ancora per un momento, con $\mathbf{A}_P$ l'accelerazione del punto generico della parte, si ha senz'altro

$$\lim \frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta m} = \lim \frac{\int_{\Delta\tau} k\, \mathbf{A}_P\, d\tau}{\Delta m} = \mathbf{A} . \tag{2}$$

Poniamo poi

$$\lim \frac{\Delta \mathbf{R}_e^*}{\Delta m} = \mathbf{F}_e^* \tag{3}$$

$$\sum\nolimits_1 \mathbf{F}_e^* = \mathbf{F}_e \tag{4}$$

$$\lim \frac{\Delta \mathbf{R}_i^*}{\Delta m} = \mathbf{F}_i^* \tag{5}$$

$$\sum\nolimits_2 \mathbf{F}_i^* = \mathbf{F}_i , \tag{6}$$

con che $\mathbf{F}_e^*$, $\mathbf{F}_e$, $\mathbf{F}_i^*$, $\mathbf{F}_i$ vanno intese funzioni del punto generico del campo rappresentante il corpo considerato al supposto istante, che noi supporremo regolari.

La (1)' si traduce in

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_i \,. \tag{7}$$

Questa è la così detta " equazione fondamentale ". I vettori $\mathbf{F}_e$ ed $\mathbf{F}_i$, la cui unità risulta rappresentata da $[lt^{-2}]$, come per la accelerazione, si chiamano " forza acceleratrice, nel considerato punto, al considerato istante " rispettivamente " esterna " ed " interna ", ambedue, se occorre, colla qualifica ulteriore " totale ": i vettori $\mathbf{F}_e^*$ ed $\mathbf{F}_i^*$, la cui unità è parimente la suddetta, si chiamano alla loro volta, " forza acceleratrice, nel considerato punto, al considerato istante, parziale " rispettivamente " esterna " e " interna ", coll'aggiunta, per la prima, del corpo in presenza del considerato e della condizione fisica a cui corrisponde, e, per la seconda, della semplice condizione fisica.

Varie specie di sistemi di forze motrici applicate ai punti di un corpo naturale ad un istante. Loro risultante e momento rispetto ad un polo.

§ 65. — I sistemi di vettori applicati, di cui sono punti d'applicazione i punti del campo τ, rappresentante il corpo naturale considerato, al supposto istante, e vettori i valori appartenenti agli stessi punti dei vettori

$$\mathbf{A}\,k\,d\tau \;,\quad \mathbf{F}_e\,k\,d\tau \;,\quad \mathbf{F}_i\,k\,d\tau \;,\quad \mathbf{F}_e^*\,k\,d\tau \;,\quad \mathbf{F}_i^*\,k\,d\tau$$

si chiamano " sistema delle forze motrici applicate ai punti del corpo naturale considerato, al supposto istante " rispettivamente " effettive ", " esterne (totali) ", " interne (totali) ", " esterne par-

ziali, corrispondenti ad un certo corpo in presenza, e ad una certa condizione fisica „, “ interne parziali, corrispondenti ad una certa condizione fisica „.

Indichiamo, per un momento, con $\mathbf{S}$ uno qualunque dei vettori $\mathbf{A}$, $\mathbf{F}_e$, $\mathbf{F}_i$, $\mathbf{F}_e^*$, $\mathbf{F}_i^*$. Per ogni sistema, si chiama “ risultante „ il vettore

$$\int_\tau \mathbf{S}\, k\, d\tau, \tag{1}$$

la cui unità è quella stessa $[lmt^{-2}]$ della forza motrice, e “ momento rispetto al polo O „, indicando con P il punto generico di τ, il vettore

$$\int_\tau (\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{S}\, k\, d\tau. \tag{2}$$

Altre simili espressioni integrali saranno introdotte in seguito, di mano in mano che se ne presenterà l'occasione.

§ 66. — Indichiamo ora, in particolare, con $\mathbf{F}^*$ uno qualunque dei vettori $\mathbf{F}_e$, $\mathbf{F}_i$, $\mathbf{F}_e^*$, $\mathbf{F}_i^*$, e con $\Delta\mathbf{R}^*$ uno qualunque dei vettori corrispondenti $\Delta\mathbf{R}_e$, $\Delta\mathbf{R}_i$, $\Delta\mathbf{R}_e^*$, $\Delta\mathbf{R}_i^*$ (cfr. § 64). Noi ammettiamo che, posto, per un momento,

$$\frac{\Delta\mathbf{R}^*}{\Delta m} = \mathbf{F}^* + \boldsymbol{\alpha}.$$

— con che (§ 64), $\boldsymbol{\alpha}$ svanirà, collo svanire del raggio di una sfera, col centro nel punto a cui compete $\mathbf{F}^*$, capace di contenere la parte a cui competono Δm e $\Delta\mathbf{R}^*$ — si verifichi anche la proprietà che $\boldsymbol{\alpha}$, nel campo rappresentato da τ, svanisce, col raggio di detta sfera, uniformemente.

Ciò premesso, abbiamo (§ 36)

$$\int_\tau \mathbf{F}^*\, k\, d\tau = \lim \mathop{\mathrm{S}} \mathbf{F}^*\, k\, \Delta\tau = \lim \mathop{\mathrm{S}} \mathbf{F}^*\, \Delta m = \lim \mathop{\mathrm{S}} \Delta\mathbf{R}^* = \mathop{\mathrm{S}} \Delta\mathbf{R}^*,$$

dove, concepito il corpo decomposto nelle parti a cui competono Δm, $\Delta\tau$, $\Delta\mathbf{R}^*$, si indicano con $\bar{k}$ e $\bar{\mathbf{F}}^*$ il valore di k e di $\mathbf{F}^*$ in un punto a piacere della parte generica, e con S la somma estesa a tutte le parti.

Si ha quindi, in particolare,

$$\int_\tau \mathbf{F}_i^* \, k \, d\tau = \mathrm{S} \, \Delta\mathbf{R}_i^* .$$

D'altra parte, indicando con $\Delta'\Delta\mathbf{R}_i^*$ la forza motrice della parte generica a cui compete $\Delta\mathbf{R}_i^*$, concepita isolata con un'altra parte qualsivoglia, a parità di posizione relativa e di condizione fisica, si ha (§ 43, III, *a)*)

$$\Delta\mathbf{R}_i^* = \mathrm{S}' \, \Delta'\Delta\mathbf{R}_i^* ,$$

dove S′ indica la somma estesa a tutte le parti che non sono la prima. E, per conseguenza,

$$\int_\tau \mathbf{F}_i^* \, k \, d\tau = \mathrm{S}\mathrm{S}' \, \Delta'\Delta\mathbf{R}_i^* = 0 ,$$

poichè le $\Delta'\Delta\mathbf{R}_i^*$ riescono a due a due eguali e di senso contrario (§ 43, II, *a*).

Si conclude (cfr. § 64, (6))

$$(1) \qquad \int_\tau \mathbf{F}_i^* \, k \, d\tau = 0, \qquad \int_\tau \mathbf{F}_i \, k \, d\tau = 0:$$

cioè il risultante di ogni sistema di forze motrici interne applicate ai punti di un corpo naturale, ad un istante, è nullo.

Rileviamo che questo risultato è semplicemente una nuova forma di un fatto già ripetutamente utilizzato, e implicito nelle precedenti conclusioni.

Segue di qua che il momento di ogni sistema di forze motrici interne, applicate ai punti di un corpo naturale, ad un istante,

rispetto ad un polo, è indipendente da questo polo, ossia è, come il risultante, un vettore invariante del considerato sistema.

Noi ne fissiamo il valore mediante uno speciale postulato.

Postulato del momento di un sistema di forze motrici interne, applicate ai punti di un corpo naturale, ad un istante.

§ 67. — *Postulato.* Il momento invariante (§ 66) di ogni sistema di forze motrici interne, applicate ai punti di un corpo naturale, ad un istante, è nullo.

Osservazione. La giustificazione di questo postulato va, come di regola, cercata nell'accordo fra le deduzioni che ne ricava la teoria e i fatti rilevati dall'esperienza. Riconosceremo intanto, fra poco, come codesta proprietà si verifichi necessariamente quando il sistema delle forze motrici interne soddisfa ad una condizione caratteristica, che l'esperienza rileva in molteplici casi.

Forza motrice elementare competente ad una condizione fisica.

§ 68. — Rappresenti $\Delta \mathbf{R}^*$ a piacere $\Delta \mathbf{R}_i^*$ o $\Delta \mathbf{R}_e^*$ (§ 64). Vagliamoci, nel primo caso, senz'altro, della supposta decomposizione del corpo naturale in parti. Nel secondo caso, immaginiamo parimente decomposto in parti il corpo in presenza del considerato, a cui, colla supposta condizione fisica, corrisponde $\Delta \mathbf{R}_e^*$. Serbiamo a $\Delta\tau$, Δm il significato di volume e di massa della parte del corpo naturale a cui compete $\Delta \mathbf{R}^*$, e indichiamo con $\Delta\tau'$, $\Delta m'$ il volume e la massa, nel primo caso, di un'altra parte qualsivoglia dello stesso corpo, e, nel secondo caso, della parte generica del secondo corpo. Infine indichiamo con $\Delta' \Delta \mathbf{R}^*$ la forza motrice della prima parte del corpo considerato, concepita isolata, a parità di posi-

zione, e di condizione fisica, colla seconda parte, nel primo caso, e colla parte generica dell'altro corpo, nel secondo. Sarà, in ogni caso (§ 43, III, *a)*),

$$\Delta\mathbf{R}^* = \mathrm{S}'\, \Delta'\Delta\,\mathbf{R}^*, \tag{1}$$

dove S' indica la somma estesa a tutte le parti del primo corpo, esclusa la considerata, oppure del secondo corpo, a seconda del caso.

Poniamo

$$\lim \lim \frac{\Delta'\Delta\,\mathbf{R}^*}{\Delta m\, \Delta m'} = \mathbf{\Phi}^*, \tag{2}$$

dove il doppio limite s'intende preso collo svanire del raggio di due sfere, l'una col centro in un punto della prima parte, capace di contenere la parte stessa, l'altra col centro in un punto della seconda parte (dello stesso corpo naturale, o dell'altro, a seconda del caso), capace di contenere detta parte.

$\mathbf{\Phi}^*$ riuscirà con questo una funzione, che noi supporremo regolare, di due punti P e P', i quali, nel primo caso, sono ambedue punto generico del campo τ, rappresentante il primo corpo naturale, al tempo t — da indicarsi con τ', quando si concepisce come luogo di P' —, e, nel secondo caso, sono, l'uno, P, lo stesso punto generico di τ, e l'altro, P', il punto generico del campo τ', rappresentante il secondo corpo, allo stesso tempo t.

Codesto vettore $\mathbf{\Phi}^*$, funzione di P e di P', non dipenderà più d'altra circostanza determinatrice del movimento che la supposta condizione fisica.

Chiamiamo quindi, in generale, il vettore

$$mm'\,\mathbf{\Phi}^*,$$

dove m, m' dinotano due masse arbitrarie, reputate come corrispondenti rispettivamente a P e a P', al quale compete l'unità

$[lmt^{-2}]$ di forza motrice, " forza motrice elementare del punto materiale definito da P ed m (cfr. § 21), isolato col punto materiale definito da P′ ed m', competente alla supposta condizione fisica ".

In particolare,

$$k d\tau\, k' d\tau'\, \Phi^*,$$

dove k e k' indicano la densità in P e in P′, si chiama la forza motrice elementare dell'elemento di corpo naturale relativo al punto P, isolato coll'elemento di corpo naturale relativo al punto P′, competente alla supposta condizione fisica.

Osservazione I. Così, intrinsecamente, Φ^* risulta indipendente dalla premessa distinzione dei due casi. Notiamo però, a scanso di equivoci, che ciò non vuol dire che si possieda, per una condizione fisica qualsiasi, la conoscenza di una forma di Φ^*, che serve egualmente pei due casi.

Osservazione II. Quando occorre considerare la forza motrice elementare dal punto materiale definito da P′ ed m', isolato col punto materiale definito da P ed m, competente alla stessa supposta condizione fisica, codesta risulta senz'altro

$$-mm'\Phi^*.$$

§ 69. — Per (2), si ha

$$\Delta'\Delta \mathbf{R}^* = (\Phi^* + \alpha)\, \Delta m\, \Delta m', \tag{3}$$

dove α svanisce collo svanire del raggio delle due suddette sfere (§ 68). Intenderemo che α, nel campo τ, e nel campo τ', svanisca uniformemente.

§ 70. — Per (1) e (3), si ha

$$\frac{\Delta \mathbf{R}^*}{\Delta m} = \mathrm{S}'(\Phi^* + \alpha)\Delta m' = \lim \mathrm{S}'(\Phi^* + \alpha)\,\Delta m',$$

dove il limite s'intende preso collo svanire del raggio di una sfera, col centro nel punto P′ del campo τ', capace di contenere la relativa parte, di massa $\Delta m'$.

Quindi, indicando con $\mathbf{F}^*$, a seconda del caso, $\mathbf{F}^*_e$ o $\mathbf{F}^*_i$, e richiamando (3) e (5) del § 64,

$$\mathbf{F}^* = \lim \frac{\Delta \mathbf{R}^*}{\Delta m} = \lim \lim \mathrm{S}'(\mathbf{\Phi}^* + \alpha)\Delta m' = \int_{\tau'} \mathbf{\Phi}^* k' d\tau'$$

(cfr. § 36).

Vale a dire

$$(4) \qquad \mathbf{F}^*_e = \int_{\tau'} \mathbf{\Phi}^* k' d\tau', \qquad (5) \qquad \mathbf{F}^*_i = \int_{\tau'} \mathbf{\Phi}^* k' d\tau',$$

dove τ' indica in (4) il campo rappresentante il corpo in presenza del considerato, e in (5) il campo rappresentante lo stesso corpo considerato, concepito come luogo di P′.

§ 71. — Si ha così (§ 65), pel risultante,

$$(6) \qquad \mathbf{R}^* = \int_{\tau} \mathbf{F}^* k d\tau = \int_{\tau} k d\tau \int_{\tau'} \mathbf{\Phi}^* k' d\tau',$$

e pel momento rispetto al polo O,

$$(7) \qquad \mathbf{M}^* = \int_{\tau} (\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{F}^* k d\tau = \int_{\tau} (\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \int_{\tau'} \mathbf{\Phi}^* k' d\tau' \, k d\tau =$$

$$= \int_{\tau} k d\tau \int_{\tau'} (\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{\Phi}^* k' d\tau'.$$

§ 72. — Nel caso di un sistema di forze motrici interne si possono scambiare gli ufficii di P e di P′, poichè ambedue rappre-

sentano il punto generico dello stesso campo. Quindi, in codesto caso, si ha ancora, notando che, con quello scambio, s'inverte il segno di $\mathbf{\Phi}^*$ (§ 68, *Oss.* II),

$$\mathbf{M}^* = -\int_{\tau'} k' d\tau' \int_{\tau} (\mathrm{P}'-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{\Phi}^* k\, d\tau ,$$

che si può scrivere, invertendo, com'è lecito, l'ordine delle integrazioni,

$$\mathbf{M}^* = -\int_{\tau} k\, d\tau \int_{\tau'} (\mathrm{P}'-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{\Phi}^* k' d\tau' .$$

E sommando membro a membro questa formola con (7), poi dividendo per 2, si ottiene la nuova espressione

$$\mathbf{M}^* = \frac{1}{2} \int_{\tau} k\, d\tau \int_{\tau'} k' d\tau' (\mathrm{P}-\mathrm{P}') \wedge \mathbf{\Phi}^* . \tag{8}$$

Questa espressione mette, in primo luogo, in evidenza come il momento $\mathbf{M}^*$ sia invariante rispetto al polo O; e dimostra inoltre che sarà senz'altro

$$\mathbf{M} = 0,$$

se per tutte le coppie P, P' è

$$(\mathrm{P}-\mathrm{P}') \wedge \mathbf{\Phi}^* = 0 :$$

cioè, se $\mathbf{\Phi}^*$ ha la direzione di $\mathrm{P}-\mathrm{P}'$, o, infine, se la forza motrice elementare, corrispondente alla supposta condizione fisica (§ 68), s'intende avere la direzione della retta passante pei due relativi punti.

Questa è appunto la condizione a cui accennavamo nel § 67.

Equazioni cardinali.

§ 73. — Riprendiamo l'equazione fondamentale (§ 64)

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_i \,.$$

Se ne ricava immediatamente, moltiplicando per k, densità nel punto considerato, al supposto istante, e integrando nel campo τ, rappresentante il corpo naturale, allo stesso istante,

$$\int_\tau \mathbf{A}\, k\, d\tau = \int_\tau \mathbf{F}_e\, k\, d\tau + \int_\tau \mathbf{F}_i\, k\, d\tau$$

$$\int_\tau (\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{A}\, k\, d\tau = \int_\tau (\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{F}_e\, k d\tau + \int_\tau (\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{F}_i\, k d\tau,$$

dove P rappresenta il punto generico del campo τ, e O un punto stabilito qualsivoglia.

Ora, si ha (§§ 66, 67)

$$\int_\tau \mathbf{F}_i\, k d\tau = 0, \qquad \int_\tau (\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{F}_i\, k d\tau = 0 \,.$$

Quindi

$$\int_\tau \mathbf{A}\, k d\tau = \int_\tau \mathbf{F}_e\, k d\tau \tag{1}$$

$$\int_\tau (\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{A}\, k d\tau = \int_\tau (\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{F}_e\, k d\tau \,. \tag{2}$$

Queste sono le "equazioni cardinali della Dinamica".

Esse si traducono, quando si voglia, nelle sei equazioni scalari

$$\int_\tau \frac{d^2x}{dt^2} k\,d\tau = \int_\tau X_e\, k\,d\tau\,, \int_\tau \frac{d^2y}{dt^2} k\,d\tau = \int_\tau Y_e\, k\,d\tau\,, \int_\tau \frac{d^2z}{dt^2} k\,d\tau = \int_\tau Z_e\, k\,d\tau$$

$$\int_\tau \left[(y-b)\frac{d^2z}{dt^2} - (z-c)\frac{d^2y}{dt^2}\right] k\,d\tau = \int_\tau \left[(y-b)Z_e - (z-c)Y_e\right] k\,d\tau$$

$$\int_\tau \left[(z-c)\frac{d^2x}{dt^2} - (x-a)\frac{d^2z}{dt^2}\right] k\,d\tau = \int_\tau \left[(z-c)X_e - (x-a)Z_e\right] k\,d\tau$$

$$\int_\tau \left[(x-a)\frac{d^2y}{dt^2} - (y-b)\frac{d^2x}{dt^2}\right] k\,d\tau = \int_\tau \left[(x-a)Y_e - (y-b)X_e\right] k\,d\tau,$$

dove x, y, z indicano le coordinate, al tempo t, del punto generico P del campo τ, a, b, c le coordinate del polo O, X_e, Y_e, Z_e le componenti della forza acceleratrice esterna $\mathbf{F}_e$.

La qualifica “ cardinale „ è intesa mettere in rilievo la grande importanza di queste equazioni, che collegano, per ogni posizione del mobile, il sistema delle accelerazioni de' suoi punti con quello delle forze motrici esterne, senza intervento delle forze motrici interne.

Vedremo come da esse scaturiscano i primi teoremi generali. Aggiungiamo che, col sussidio principalmente del concetto di vincolo, esse costituiscono poi il fondamento del Calcolo del Movimento [1]). Al qual proposito, notiamo, per esempio, che, se s'immagina introdotto il vincolo che il mobile si componga di tanti pezzi, ciascuno dei quali possiede movimento rigido, cioè si mantiene invariabile, applicando dette equazioni a ciascun pezzo rigido, si scriveranno tante equazioni scalari quanti sono i parametri occorrenti per fissar la posizione del mobile, ad ogni istante. Che

---

[1]) V. la prima parte dell'Appendice.

se si suppone nota la forza motrice elementare (§ 68), i secondi membri riusciranno funzioni note di questi parametri, e si otterrà così un sistema di equazioni alle derivate ordinarie, del secondo ordine, dove il tempo funge da variabile indipendente, e detti parametri da incognite, atto a determinare univocamente i parametri stessi in funzione del tempo, coll'aggiunta della posizione e dell'atto di movimento del mobile — cioè dei valori dei parametri e delle loro derivate prime rispetto al tempo — ad un istante particolare.

Applicazione all'equilibrio.

§ 74. — Un corpo naturale si dice "in equilibrio, in un intervallo di tempo", quando, in questo intervallo di tempo, ogni suo punto serba posizione invariata.

Concepiti applicati ai punti di un corpo naturale in equilibrio, in un intervallo di tempo, i sistemi di forze motrici interne ed esterne, corrispondenti a condizioni fisiche e a corpi in presenza determinati, l'equilibrio ci apparisce come una forma particolare di movimento, pel quale è nulla, ad ogni istante, la velocità, e quindi l'accelerazione, d'ogni punto: e nullo, per conseguenza, il sistema delle forze motrici effettive.

Le equazioni cardinali si riducono così a

$$\int_\tau \mathbf{F}_e k d\tau = 0, \qquad \int_\tau (\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{F}_e k d\tau = 0,$$

dette "equazioni cardinali dell'equilibrio".

Esse rappresentano condizioni necessarie pel sistema delle forze motrici esterne, applicate ai punti del mobile, affinchè si verifichi, nel considerato intervallo, il suo equilibrio.

Equazione fondamentale, sistemi di forze motrici applicate ai punti del corpo naturale, equazioni cardinali nel movimento e nell'equilibrio relativo.

§ 75. — Riprendiamo l'equazione fondamentale (§ 64)

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_i . \tag{1}$$

Se, insieme col movimento assoluto del considerato corpo naturale, si considera il suo movimento relativo ad una terna d'assi mobili considerati come fissi in una posizione da assegnarsi, si ha, pel teorema di Coriolis, coi simboli precedentemente adoperati (§ 52), toltone l'indice P,

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_R + \mathbf{A}_S - 2\,\mathbf{V}_R \wedge \omega .$$

Introducendo la qual relazione in (1), se ne ricava

$$\mathbf{A}_R = \mathbf{F}_e - \mathbf{A}_S + 2\,\mathbf{V}_R \wedge \omega + \mathbf{F}_i : \tag{2}$$

e codesta si chiama l' " equazione fondamentale del movimento relativo ".

Si vede che essa si deduce dall'equazione analoga del movimento assoluto, aggiungendo nel secondo membro i termini $-\mathbf{A}_S$ e $2\,\mathbf{V}_R \wedge \omega$.

§ 76. — I due sistemi di vettori applicati dei quali sono punti d'applicazione i punti del campo τ, rappresentante il corpo naturale al considerato istante, e vettori i valori appartenenti agli stessi punti dei vettori

$$-\mathbf{A}_S\, k d\tau \qquad 2\,\mathbf{V}_R \wedge \omega\, k d\tau ,$$

si chiamano il " sistema delle eguali e contrarie alle forze motrici di trascinamento ", e, rispettivamente, il " sistema delle forze motrici

centrifughe composte „, ambedue, applicate ai punti del corpo naturale. Collettivamente, essi si chiamano " sistemi delle forze motrici apparenti del movimento relativo, applicate ai punti del corpo naturale „.

Per ambedue i sistemi, si definisce il risultante e il momento rispetto ad un polo colle formole (1) e (2) del § 65. Il risultante riesce il vettore definito al § 53 come corrispondente forza motrice apparente.

Nel caso del movimento traslatorio degli assi, $\mathbf{A}_S$ riesce la stessa per tutti i punti, e, annullandosi ω, si annulla il sistema delle forze motrici centrifughe composte. Se inoltre il movimento è rettilineo uniforme, $\mathbf{A}_S$ è nullo, e si annullano ambedue i sistemi di forze motrici apparenti.

Nel caso del movimento rotatorio uniforme, $-\mathbf{A}_S$ diventa l'accelerazione centrifuga. Il primo sistema si chiama il " sistema delle forze motrici centrifughe „, applicate ai punti del corpo naturale. Il risultante riesce la forza motrice centrifuga definita al § 55.

§ 77. — Da (2), col procedimento tenuto al § 73, si deducono

$$\int_\tau \mathbf{A}_R\, k d\tau = \int_\tau \mathbf{F}_e\, k d\tau - \int_\tau \mathbf{A}_S\, k d\tau + 2\int_\tau \mathbf{V}_R\, k d\tau \wedge \omega$$

$$\int_\tau (P-O)\wedge \mathbf{A}_R\, k d\tau = \int_\tau (P-O)\wedge \mathbf{F}_e\, k d\tau - \int_\tau (P-O)\wedge \mathbf{A}_S\, k d\tau +$$

$$+ 2\int_\tau (P-O)\wedge(\mathbf{V}_R \wedge \omega)\, k d\tau,$$

che si chiamano le " equazioni cardinali del movimento relativo „.

Si vede che si passa dalle equazioni cardinali del movimento assoluto alle equazioni cardinali del movimento relativo, aggiungendo al sistema delle forze motrici esterne i sistemi delle forze motrici apparenti dello stesso movimento relativo.

Così, nelle seguenti deduzioni, s'intenderà che i risultati si estendono dal movimento assoluto al movimento relativo colla medesima aggiunta dei sistemi delle forze motrici apparenti al sistema delle forze motrici esterne.

§ 78. — Ove si tratti dell'equilibrio relativo, in un certo intervallo di tempo, si ha, in codesto intervallo, $\mathbf{V}_R = 0$, e quindi si annulla il sistema delle forze motrici centrifughe composte. Le equazioni cardinali dell'equilibrio relativo riescono così

$$\int_\tau \mathbf{F}_e \, k d\tau - \int_\tau \mathbf{A}_s \, k d\tau = 0$$

$$\int_\tau (P-O) \wedge \mathbf{F}_e \, k d\tau - \int_\tau (P-O) \wedge \mathbf{A}_s \, k d\tau = 0 \, .$$

Teorema del risultante delle forze motrici effettive.

§ 79. — Leggendo (1) del § 73, si ottiene il

Teorema. Il risultante del sistema delle forze motrici effettive, applicate ai punti di un corpo naturale, ad ogni istante, è eguale al risultante del sistema delle forze motrici esterne, applicate ai punti del corpo, allo stesso istante.

Osservazione. Questo teorema, che chiamiamo teorema del risultante delle forze motrici effettive, è una forma del primo teorema generale della Dinamica: il quale però si presta meglio alle deduzioni sotto le due forme seguenti.

Teorema del movimento del centro di massa.

§ 80. — Indicando con $\overline{\mathbf{A}}$ l'accelerazione del centro di massa del corpo naturale considerato, al supposto istante, la (1) del § 73

si può porre sotto la forma

$$(1)\qquad m\bar{\mathbf{A}} = \int_{\tau} \mathbf{F}_e \, k d\tau .$$

La quale dà luogo al

Teorema. Il prodotto della massa di un corpo naturale per l'accelerazione del suo centro di massa, ad ogni istante, è eguale al risultante del sistema delle forze motrici esterne, applicate ai punti del corpo, allo stesso istante.

Questo è il così detto teorema del movimento del centro di massa.

Osservazione. È una forma del primo teorema generale della Dinamica, colla quale si ritrova, in sostanza, la proposizione che il prodotto della massa per l'accelerazione del centro di massa è eguale alla forza motrice (effettiva) (§ 41). Soltanto, coi nuovi termini, si mette in evidenza come, ad ogni istante, l'accelerazione del centro di massa riesca determinata puramente dalle forze esterne, senza concorso delle forze interne.

Si consegue così l'importante risultato che, in alcuni casi, in base allo stesso teorema, il movimento del centro di massa si potrà assegnare indipendentemente dalla conoscenza delle forze interne. Tale è il caso che il risultante delle forze esterne, in via di sufficiente approssimazione, riesca indipendente dalla posizione relativa del corpo considerato e dei corpi supposti in presenza di esso, o che, in un modo qualunque, se ne ottenga preventivamente un'espressione in funzione del tempo o della posizione del centro di massa, o della sua velocità, o ancora di codeste variabili insieme.

Sistema delle quantità di moto, applicate ai punti di un corpo naturale, ad un istante. Suo risultante, e momento rispetto ad un polo.

§ 81. — Indicando con $\mathbf{V}$ la velocità del punto generico P del corpo naturale considerato, al supposto tempo t, il sistema di vet-

tori applicati, di cui sono punti d'applicazione i singoli punti P del campo τ, rappresentante il corpo naturale, a quel tempo, e vettori i valori appartenenti agli stessi punti P dei vettori $\mathbf{V}\, k d\tau$ si chiama il sistema delle quantità di moto, applicate ai punti del corpo naturale, al considerato istante.

Si chiama poi " risultante del sistema delle quantità di moto ", applicate ai punti del corpo naturale, al considerato istante, il vettore

$$\mathbf{Q} = \int_\tau \mathbf{V}\, k d\tau ,$$

che coincide colla quantità di moto del corpo naturale precedentemente definita (§ 50), e " momento dello stesso sistema, rispetto al punto O come polo ", il vettore

$$\mathcal{M} = \int_\tau (\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{V}\, k d\tau ,$$

detto anche " quantità di moto areale del corpo naturale, rispetto al polo O ".

Codesto nome ha origine dal seguente significato del vettore in discorso, che giova tener presente nelle deduzioni. Consideriamo lo spostamento elementare del corpo naturale fra il tempo t e il tempo $t + \mathrm{D}t$, dove $\mathrm{D}t$ è supposto infinitesimale. Sia P' il posto al tempo $t + \mathrm{D}t$ del punto generico, di cui P indica il posto al tempo t. Sarà

$$\mathrm{D}\mathbf{s} = \mathrm{P}' - \mathrm{P}$$

lo spostamento elementare di detto punto, e

$$\mathbf{V} = \frac{\mathrm{D}\mathbf{s}}{\mathrm{D}t} ,$$

$$\mathcal{M} = \frac{\int_\tau k d\tau (\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \mathrm{D}\mathbf{s}}{\mathrm{D}t} .$$

Ora

$$(\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \mathrm{D}s$$

è il vettore avente per quantità il doppio dell'area del triangolo O P P', direzione perpendicolare al piano di questo triangolo, e senso positivo rispetto al giro che conduce, per l'angolo infinitesimale, da O P a O P'; vale a dire il vettore, la cui componente, secondo un asse qualunque, è la misura dell'area della projezione Opp' del suddetto triangolo sopra un piano, passante per O, perpendicolare dell'asse, da assumersi come positiva o negativa, secondo che è positivo o negativo il senso del giro che conduce da Op a Op', per l'angolo infinitesimale, rispetto al senso dell'asse.

È quindi

$$\int_\tau k d\tau (\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \mathrm{D}s\,,$$

secondo il consueto concetto del risultante di un sistema di vettori corrispondenti ai punti P del campo τ, il risultante dei suddetti vettori, moltiplicati per la massa elementare $kd\tau$, e, finalmente, $\mathcal{A}$ riesce il rapporto di questo risultante, infinitesimale con Dt, allo stesso Dt.

Teorema del risultante delle quantità di moto, o della quantità di moto.

§ 82. — La (1) del § 73 può porsi sotto la forma

$$\int \frac{d\mathbf{V}}{dt} k d\tau = \int_\tau \mathbf{F}_e \, k d\tau\,,$$

ossia (cfr. §§ 16, 17)

$$\frac{d\int_\tau \mathbf{V}\, k d\tau}{dt} = \int_\tau \mathbf{F}_e \, k d\tau\,,$$

o ancora (§ 81)

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \int_\tau \mathbf{F}_e \, k d\tau \,. \tag{1}$$

E perciò si ha il

Teorema. La derivata rispetto al tempo del risultante del sistema delle quantità di moto, applicate ai punti di un corpo naturale, ossia della quantità di moto dello stesso corpo naturale, ad ogni istante, è eguale al risultante del sistema delle forze motrici esterne, applicate ai punti del corpo naturale, al medesimo istante.

Questo è il teorema detto del risultante delle quantità di moto, o della quantità di moto.

Teorema della conservazione del movimento del centro di massa.

§ 83. — Rammentando che il componente secondo una retta dell'accelerazione di un punto mobile è l'accelerazione della projezione del punto mobile sulla retta, scaturisce senz'altro dal § 80 il seguente

Teorema. Se, in un intervallo di tempo, è nullo il componente secondo una retta del risultante del sistema delle forze motrici esterne, applicate ai punti di un corpo naturale, il movimento della projezione del centro di massa del corpo naturale su codesta retta, nello stesso intervallo di tempo, è nullo o uniforme.

In particolare, se, in un intervallo di tempo, è nullo il suddetto risultante del sistema delle forze motrici esterne, il movimento del centro di massa, nello stesso intervallo di tempo, è o nullo o rettilineo uniforme [1]).

---

[1]) .... Corporum omnium in se mutuo agentium (exclusis actionibus et impedimentis externis) commune centrum gravitatis vel quiescit vel movetur uniformiter in directum (NEWTON, *Phil. Nat. Princ. Math. — Axiomata sive Leges Motus.* Coroll. IV).

Queste proposizioni costituiscono il teorema della conservazione del movimento del centro di massa.

Teorema della conservazione della quantità di moto.

§ 84. — Dal § 82 segue immediatamente il

Teorema. Se, in un intervallo di tempo, è nullo il componente, secondo una retta, del risultante del sistema delle forze motrici esterne, applicato ai punti di un corpo naturale, il componente della quantità di moto del corpo naturale, secondo codesta retta, nello stesso intervallo di tempo, è costante.

In particolare, se, in un intervallo di tempo, è nullo il suddetto risultante del sistema delle forze motrici esterne, la quantità di moto del corpo naturale, nello stesso intervallo di tempo, è costante [1]).

Queste proposizioni costituiscono il teorema della conservazione della quantità di moto.

Osservazione sui precedenti teoremi.

§ 85. — I precedenti teoremi sono indipendenti dal postulato del momento dei sistemi di forze motrici interne (§ 67), e fondati sulla proprietà che il risultante degli stessi sistemi è nullo: la quale è un'immediata conseguenza della legge dell'eguaglianza dell'azione e della reazione (§ 43, II, *a)*). Essi riproducono, in sostanza, circostanze già ritrovate nel primo capitolo: ma, sotto una nuova forma, che mette in rilievo la diversa parte delle forze esterne ed interne, nella determinazione del movimento di un corpo

---

[1]) Quantitas motus quae colligitur capiendo summa motuum factorum ad eandem partem, et differentiam factorum ad contrarias, non mutatur ab actione corporum inter se. (NEWTON. *Loc. cit.* Coroll. III).

naturale, come pure l'intervento della ricordata legge dell'eguaglianza dell'azione e della reazione, per eliminare, in certi risultati, l'effetto delle forze interne.

Sistema delle forze di gravità. Suo risultante e momento rispetto ad un polo. Centro di gravità.

§ 86. — La forza motrice $\Delta \mathbf{R}_e^*$ (cfr. § 64) rappresenti il peso della relativa parte del corpo naturale (§ 59). Allora, indicando con $\mathbf{g}$ il vettore avente per orientazione quella della " verticale del luogo ", e per grandezza la grandezza g dell'" accelerazione di gravità " nello stesso luogo, sarà

$$\Delta \mathbf{R}_e^* = \mathbf{g}\,\Delta m \qquad \lim \frac{\Delta \mathbf{R}_e^*}{\Delta m} = \mathbf{F}_e^* = \mathbf{g}. \tag{1}$$

Il sistema delle forze motrici $\mathbf{g}\,k d\tau$, applicate ai punti del corpo naturale considerato, si " chiama il sistema delle forze motrici di gravità ". Il suo risultante riesce il peso del corpo naturale

$$\mathbf{P} = \int_\tau \mathbf{g}\,k d\tau = m\,\mathbf{g}: \tag{2}$$

il suo momento rispetto ad un polo O sarà, alla sua volta, rappresentato da

$$\mathbf{M} = \int_\tau (\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{g}\,k d\tau = \int_\tau (\mathrm{P}-\mathrm{O})\,k d\tau \wedge \mathbf{g}$$
$$= (\overline{\mathrm{P}}-\mathrm{O})\,m \wedge \mathbf{g} = (\overline{\mathrm{P}}-\mathrm{O}) \wedge m\,\mathbf{g},$$

indicando con $\overline{\mathrm{P}}$ il centro di massa del corpo naturale.

Per modo che, valendosi di (2), si conclude

$$\mathbf{M} = (\overline{\mathrm{P}}-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{P}. \tag{3}$$

Vale a dire, coi termini della teoria generale dei vettori ap-

plicati [1]), il risultante del sistema delle forze motrici di gravità, applicate ai punti di un corpo, o il peso dello stesso corpo, ammette il centro di massa del corpo per punto d'applicazione, e la verticale del centro di massa per retta d'applicazione. Per questa ragione, il centro di massa si chiama, più particolarmente nelle questioni attinenti ai gravi, ma poi anche in generale, " centro di gravità „ o " baricentro „.

Osservazione. Secondo la stessa teoria dei vettori applicati, il centro di massa o di gravità costituisce il " centro dei vettori paralleli „ rappresentati dalle forze motrici di gravità, applicate ai punti del corpo.

Applicazione all'esperienza, e relativo controllo della teoria.

§ 87. — Applicheremo ora i precedenti teoremi ad alcuni fenomeni fisici, ragionando sui corpi concreti della Fisica come su corpi naturali della teoria, e verificando, entro i concessi limiti, l'accordo delle deduzioni della teoria coi fatti rilevati dall'esperienza. La conclusione di questo confronto, che abbiamo cominciato nel precedente capitolo (§§ 56 e seguenti), e proseguiamo a più riprese in questo, vuol essere che, riconosciuta l'efficacia dei nostri modelli teorici per rappresentare i corpi concreti, noi ci vagliamo poi della teoria, per completare e prevenire l'esperienza nello studio dei fenomeni del mondo reale.

§ 88. — *Movimento dei gravi liberi.* Il movimento di un grave, libero da ogni ostacolo, e intesa trascurabile l'influenza dell'aria atmosferica [2]), apparisce, in generale, più o meno complesso. Un

---

[1]) Cfr. la seconda parte dell'Appendice.

[2]) La « resistenza dell'aria atmosferica » può modificare completamente la fisonomia del movimento di un projettile, quando codesto abbia forme convenienti. È notorio il bumerang, giavellotto dei selvaggi dell'Australia, che ritorna ai piedi del lanciatore.

projettile, lanciato da un cannone rigato, gira intorno a sè stesso: una mazza, un piatto, convenientemente scagliati, compiono complicate evoluzioni: una goccia d'acqua cadente passa periodicamente per forme diverse: un animale, che si slancia, o cade, da un'altura, può, nel corso del movimento, assumere atteggiamenti diversi. Questo movimento è determinato collettivamente da forze interne ed esterne. Le prime sono le forze di coesione, le forze elastiche, le forze muscolari ecc.: le seconde si riducono alle forze di gravità, trascurando almeno, ciò ch'è lecito pel presente confronto, le forze apparenti del movimento relativo (cfr. § 76 e § 56). E poichè il resultante del sistema delle forze motrici di gravità, che è il peso del corpo, è invariabile, segue dal teorema del movimento del centro di massa (§ 80) che il movimento del centro di massa, in ogni caso, non potrà essere che il movimento parabolico, corrispondente alla posizione e alla velocità dello stesso centro di massa, all'istante iniziale: incluso, s'intende, come caso particolare, il movimento rettilineo uniformemente accelerato, quando, all'istante iniziale, la velocità del centro di massa sia nulla, o abbia la direzione della verticale.

Abbiamo già altrove invocato la testimonianza di questo movimento (§ 58). Ora mettiamo in particolar rilievo la circostanza che il movimento del centro di massa sarà necessariamente il suddetto, qualunque possa essere, per l'intervento delle forze interne, il movimento del corpo, e possa quindi variare, se capita, nel corso del tempo, la posizione relativa delle varie parti del corpo. Codesto è ancora conforme all'esperienza. Così, è ben noto che, per diversi atteggiamenti della persona, che si provochino coll'ajuto delle forze muscolari, non si può impedire la caduta in un vano, o preservare il centro della persona dall'urto contro un ostacolo. È pure un fatto notorio che una bomba, che scoppia in alto, dissemina tutt' all' ingiro le proprie scheggie, cioè non accade che tutti i frammenti vadano in alto, o in basso, o a destra,

o a sinistra. E ciò è conforme alla deduzione teorica che il comun centro di massa dei varii pezzi della bomba — finchè nessuno incontra un ostacolo — proseguirà a descrivere la parabola, che, senza lo scoppio, sarebbe descritta dal centro di massa della bomba compatta: poichè il peso del loro insieme non cambia per la disaggregazione provocata da una variazione delle sole forze interne.

Locomozione. Per elidere il suddetto movimento del centro di massa di un grave, occorre un ostacolo — un *sostegno* — che determini nel corpo una forza motrice eguale e contraria al peso. Anche codesto fu precedentemente considerato, per ricavarne importanti conclusioni (§ 59). Tale è il caso di una persona che si regge sopra il suolo, il quale dev'essere quindi reputato capace di determinare nella persona stessa una forza motrice di direzione verticale, e grandezza variabile, conformemente al peso della persona. Supponiamo, per fissar le idee, il suolo rappresentato da un piano orizzontale. Quella forza motrice riuscirà perpendicolare al suolo, e potrà essere interpretata come resistenza alla penetrazione o al cedimento. Se poi s'immagina che la persona cammini, in quanto essa, col diverso atteggiamento del piede, comanda il proprio spostamento orizzontale, bisogna ammettere che il suolo sia anche capace, in conseguenza di opportune posizioni del piede, di determinare nella persona una forza motrice orizzontale, e cioè parallela al suddetto piano, la quale potrà interpretarsi come una resistenza allo strisciamento. Infatti, essendo nullo il componente orizzontale delle rimanenti forze motrici, diversamente, pel teorema della conservazione del movimento del centro di massa (§ 83), la proiezione del centro di massa della persona sul suolo non potrebbe altrimenti che restar fissa, quando, ad un istante, la sua velocità fosse nulla, o moversi di moto rettilineo uniforme, quando, ad un istante, non fosse nulla. Vale a dire, una persona non potrebbe, da un posto dove fosse prima in quiete, trasportarsi ad un altro posto del suolo orizzontale, e,

una volta in movimento, non potrebbe più fermarsi. La suddetta resistenza allo strisciamento si chiama " attrito ": e, all'esperienza, risulta posseduta in vario grado dalle diverse qualità di suolo, fino a riuscire presso che nulla per talune, come, per esempio, il marmo lucido e il ghiaccio. E sono ben note la difficoltà di mettersi in moto sopra simili pavimenti, e quella specie di movimento involontario o spontaneo, per cui si dice che su tali pavimenti si scivola. Così il teorema della conservazione del movimento del centro di massa rende ragione di questi fatti famigliari, e mette in evidenza l'ufficio dell'attrito del suolo nel meccanismo della locomozione.

Movimenti impulsivi. Integrando l'equazione

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \int_\tau \mathbf{F}_e \, k d\tau ,$$

che traduce il teorema della quantità di moto (§ 82), in un intervallo di tempo $(t_1 t_2)(t_1 < t_2)$, se ne ricava

$$\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_\tau \mathbf{F}_e \, k d\tau = \overline{\mathbf{R}}_e (t_2 - t_1) , \tag{1}$$

dove $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$, indicano i valori della quantità di moto ai tempi t_1 e t_2, e $\overline{\mathbf{R}}_e$ un valor medio del risultante del sistema delle forze motrici esterne, applicate ai punti del mobile, nell'intervallo di tempo $(t_1 t_2)$.

Ora, si chiama " moto impulsivo " di un corpo naturale un movimento, che si compie in un intervallo di tempo così breve, da riuscire inapprezzabile lo spostamento del corpo, pur riuscendo sensibilmente diversa la distribuzione della velocità nei punti del corpo, cioè l'atto di movimento del corpo, al principio e alla fine dell'intervallo di tempo. Tale rapida variazione dell'atto di movimento va attribuita alla comparsa, nell'intervallo di tempo in

discorso, di forze motrici assai grandi, applicate alle parti del corpo. Supponiamo che queste forze motrici appartengano alle interne. Potremo, in tal caso intendere che $\overline{\mathbf{R}}_e$ serbi un valore moderato, per modo che, applicando al movimento impulsivo la (1), se ne ricaverà sensibilmente

$$\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_1 = 0:$$

e, se supponiamo $\mathbf{Q}_1 = 0$, caso che si verificherà, se al tempo iniziale t_1 il mobile è in quiete,

$$\mathbf{Q}_2 = 0:$$

o ancora, concependo il mobile decomposto in un modo qualunque in parti, e indicando con $\mathbf{Q}_2^{(r)}$ la quantità di moto, all'istante finale, della parte generica (§ 51),

$$\sum_r \mathbf{Q}_2^{(r)} = 0.$$

Ne viene, in particolare, che, se s'immagina il corpo decomposto in due parti, di masse m' e m'', e consta che, all'istante finale, il centro di massa della prima parte possiede una velocità $\mathbf{V}'$, dovrà, allo stesso istante, il centro di massa della seconda parte possedere una velocità $\mathbf{V}''$, tale che

$$m'\mathbf{V}' + m''\mathbf{V}'' = 0:$$

per cui le due velocità avranno eguale direzione, senso contrario, e grandezze inversamente proporzionali alle masse delle relative parti.

Manifestamente, queste conclusioni trovano la loro conferma sperimentale nei noti fatti del rinculare del cannone, della botta del calcio del fucile, dell'ascensione del razzo, e, alla loro volta, in base alla teoria, ne rendono ragione, col teorema della quantità di moto, e ne precisano i particolari.

Applicazione al sistema solare. L'azione delle stelle fisse sul movimento dei corpi componenti il sistema solare, per la enorme distanza di esse, può reputarsi insensibile: vale a dire, sensibilmente nullo il sistema delle forze motrici applicate ai punti del sistema solare, determinato dalle stelle fisse — ipotesi che è avvalorata dalla forma della relativa forza elementare, che sarà dedotta in seguito.

Deve quindi considerarsi come nullo il risultante delle forze esterne applicate ai pûnti del sistema solare, in qualunque intervallo di tempo: donde segue che il centro di massa del sistema solare, che si chiama anche il comune centro di massa dei corpi che lo compongono, deve o essere immobile o possedere movimento rettilineo uniforme (§ 83).

D'altra parte, indicando con $\overline{P}, \overline{P}_s$ e $\overline{P}_r$ il centro di massa del sistema solare, del sole, e di un altro corpo qualunque del sistema, e con m, m_s e m_r la massa degli stessi corpi, abbiamo (cfr. (3) del § 39)

$$m(\overline{P}-O)=m_s(\overline{P}_s-O)+\sum_r m_r(\overline{P}_r-O)$$

$$\overline{P}-O=\frac{m_s}{m}(\overline{P}_s-O)+\sum_r \frac{m_r}{m}(\overline{P}_r-O) \tag{2}$$

$$m=m_s+\sum_r m_r, \qquad \frac{m}{m_s}=1+\sum_r \frac{m_r}{m_s}:$$

e, per la piccolezza, in confronto del sole, di ciascun degli altri corpi, il rapporto $\frac{m_r}{m_s}$ può reputarsi assai piccolo in confronto dell'unità - ipotesi che è pure avvalorata da risultati che conseguiremo in seguito.

Ponendo quindi, per approssimazione,

$$\frac{m_s}{m}=1, \quad \frac{m_r}{m}=0,$$

abbiamo da (2)

$$P=P_s:$$

cioè il centro di massa del sole coinciderà sensibilmente col centro di massa del sistema solare.

Collegando il qual risultato col precedente, concludiamo che il centro di massa del sole dovrà mantenersi assai prossimo ad un punto fisso o ad un punto in movimento rettilineo uniforme.

Un movimento collettivo rettilineo uniforme del sistema solare, rispetto alle stelle fisse, è conforme al risultato dell'esperienza. Il centro del sole immobile per rispetto al sistema solare è l'ipotesi colla quale vanno congiunti i nomi di Copernico e di Galileo. La dimostrazione di questa approssimativa immobilità, fondata sul confronto della massa dei pianeti con quella del sole, appartiene a Newton [1]).

Teorema del momento delle forze motrici effettive.

§ 89 — Leggendo l'equazione (2) del § 73,

$$(1) \qquad \int_\tau (P-O) \wedge \mathbf{A}\, k d\tau = \int_\tau (P-O) \wedge \mathbf{F}_e\, k d\tau ,$$

abbiamo il

Teorema. Il momento del sistema delle forze motrici effettive, applicate ai punti di un corpo naturale, ad un istante, rispetto ad un polo, è eguale al momento, rispetto allo stesso polo, del sistema delle forze motrici esterne, applicate ai punti del corpo, allo stesso istante.

Questo è il teorema del momento delle forze motrici effettive.

---

[1]) *Hypothesis:* Centrum systematis mundani quiescere. *Theorema:* Commune centrum gravitatis terrae, solis et planetarum omnium quiescere. *Theorema:* Solem motu perpetuo agitari, sed nunquam longe recedere a communi gravitatis centro planetarum omnium. (NEWTON, *Phil. Nat. Princ. Math.* Lib. III, Prop. XI, XII).

Teorema del momento delle quantità di moto, o della quantità di moto areale, o delle aree.

§ 90. — Col solito significato dei simboli, abbiamo

$$(1)\qquad (\mathrm{P}-\mathrm{O})\wedge\mathbf{A}=(\mathrm{P}-\mathrm{O})\wedge\frac{d\mathbf{V}}{dt}=\frac{d[(\mathrm{P}-\mathrm{O})\wedge\mathbf{V}]}{dt}-\frac{d(\mathrm{P}-\mathrm{O})}{dt}\wedge\mathbf{V}.$$

Supponiamo che il polo O sia, in generale, un certo punto mobile, e indichiamone con $\mathbf{V}_0$ la velocità al tempo t. Sarà

$$\frac{d(\mathrm{P}-\mathrm{O})}{dt}=\mathbf{V}-\mathbf{V}_0,\quad \frac{d(\mathrm{P}-\mathrm{O})}{dt}\wedge\mathbf{V}=(\mathbf{V}-\mathbf{V}_0)\wedge\mathbf{V}=-\mathbf{V}_0\wedge\mathbf{V}.$$

Quindi, per (1), indicando con $\overline{\mathbf{V}}$ la velocità, allo stesso istante, del centro di massa del corpo, con m la massa del corpo, e valendosi di (3) del § 16 e di (1) e (2) del § 50,

$$(2)\qquad \int_\tau(\mathrm{P}-\mathrm{O})\wedge\mathbf{A}\,k\,d\tau=\frac{d\int_\tau(\mathrm{P}-\mathrm{O})\wedge\mathbf{V}\,k\,d\tau}{dt}+\mathbf{V}_0\wedge m\overline{\mathbf{V}}.$$

Per modo che sarà

$$\int_\tau(\mathrm{P}-\mathrm{O})\wedge\mathbf{A}\,k\,d\tau=\frac{d\int_\tau(\mathrm{P}-\mathrm{O})\wedge\mathbf{V}\,k\,d\tau}{dt},$$

sotto la condizione necessaria e sufficiente che, al considerato istante, o sia $\overline{\mathbf{V}}=0$, oppure sia $\mathbf{V}_0$ nullo o parallelo a $\overline{\mathbf{V}}$.

Sotto queste condizioni, (1) del § 89 si può porre sotto la forma (cfr. § 81)

$$(3)\qquad \frac{d\mathcal{H}}{dt}=\int_\tau(\mathrm{P}-\mathrm{O})\wedge\mathbf{F}_e\,k\,d\tau.$$

In particolare, sono verificate queste condizioni, se O rappresenta un punto fisso, o il centro di massa. Si ottiene così il

Teorema. La derivata rispetto al tempo del momento del sistema delle quantità di moto, applicate ai punti di un corpo na-

turale, ad un istante, ossia della sua quantità di moto areale, ad un istante, rispetto ad un polo, che o sia fisso, o sia il centro di massa, è eguale al momento, rispetto allo stesso polo, del sistema delle forze motrici esterne, applicate ai punti del corpo, all'istante considerato.

Questo è il teorema del momento delle quantità di moto, o della quantità di moto areale, o delle aree.

Osservazione I. Avvertiamo le condizioni più generali, che scaturiscono dalla precedente deduzione.

Osservazione II. Condizioni anche più generali competono all'equazione omologa alla (3), fra i componenti, secondo una retta, dei due vettori che vi figurano; con che si ha il teorema del momento delle quantità di moto etc., rispetto ad una retta.

Difatti, scaturisce dalla (2) che perciò è necessario e sufficiente che sia nullo il componente di $\overline{\mathbf{V}}$ secondo un piano perpendicolare alla retta, oppure il componente di $\mathbf{V}_0$, secondo lo stesso piano, nullo o parallelo al componente omologo di $\overline{\mathbf{V}}$.

Lo stesso teorema nel movimento riferito al centro di massa.

§ 91. — " Movimento riferito ad un punto „ si chiama, in generale, il movimento relativo ad una terna d'assi, in movimento traslatorio, coll'origine nel punto, considerati come fissi. Quindi, se $\mathbf{V}$ è la velocità di un punto del mobile nel suo movimento assoluto, e $\mathbf{V}_0$ la velocità del punto O, a cui è riferito il movimento, la velocità del suddetto punto nel suo movimento riferito al punto O sarà

$$\mathbf{V}_R = \mathbf{V} - \mathbf{V}_0 .$$

Ora, si ha (cfr. § 39), con $\overline{\mathrm{P}}$ indicando il centro di massa,

$$\int_\tau (\mathrm{P} - \overline{\mathrm{P}}) k \, d\tau = 0 .$$

Quindi

$$\int_\tau (\mathrm{P}-\overline{\mathrm{P}}) \wedge (\mathbf{V}-\overline{\mathbf{V}}) k\, d\tau = \int_\tau (\mathrm{P}-\overline{\mathrm{P}}) \wedge \mathbf{V}\, k d\tau - \int_\tau (\mathrm{P}-\overline{\mathrm{P}}) k d\tau \wedge \overline{\mathbf{V}} =$$

$$= \int_\tau (\mathrm{P}-\overline{\mathrm{P}}) \wedge \mathbf{V}\, k d\tau .$$

Vale a dire la quantità di moto areale rispetto al centro di massa come polo è la stessa per un movimento, e pel corrispondente riferito al centro di massa.

Si ha quindi, senz'altro, il

Teorema. La derivata rispetto al tempo del momento del sistema delle quantità di moto, applicate ai punti di un corpo, ad un istante, ossia della sua quantità di moto areale, ad un istante, nel movimento del corpo riferito al suo centro di massa, rispetto al centro di massa come polo, è eguale al momento del sistema delle forze motrici esterne, applicate ai punti del corpo, allo stesso istante, rispetto al medesimo centro di massa, come polo.

Questo è il teorema del momento delle quantità di moto, o della quantità di moto areale, o delle aree, nel movimento riferito al centro di massa.

Teorema della conservazione delle quantità di moto areale o della conservazione delle aree.

§ 92. — Da (2) del § 90 segue immediatamente il

Teorema. Se, in un intervallo di tempo, è nullo il componente, secondo una retta, del momento del sistema delle forze motrici esterne, applicate ai punti di un corpo naturale, rispetto ad un punto fisso, o al centro di massa, il componente, secondo la retta, della quantità di moto areale del corpo, rispetto allo stesso punto come polo, in detto intervallo di tempo, è costante.

Notiamo che detto componente è ciò che si chiama pure quantità di moto areale, rispetto alla retta avente la supposta direzione, e passante pel supposto polo.

In particolare, se è nullo, nell'accennato intervallo di tempo, il momento del sistema delle forze motrici esterne, rispetto ad un polo come il suddetto, la quantità di moto areale, rispetto al medesimo polo, nello stesso intervallo di tempo, sarà costante.

Queste proposizioni costituiscono il così detto teorema della conservazione della quantità di moto areale, o della conservazione delle aree (rispetto ad una retta, e rispetto ad un polo) [1].

Osservazione. Condizioni più generali scaturiscono dalle due *Osservazioni* del § 90.

Lo stesso teorema nel movimento riferito al centro di massa.

§ 93. — In base al § 91, la stessa proprietà si può enunciare pel movimento riferito al centro di massa, inteso che il polo del momento delle forze motrici esterne e della quantità di moto areale sia lo stesso centro di massa.

Si ottiene così il teorema della conservazione della quantità di moto areale, o della conservazione delle aree, nel movimento riferito al centro di massa.

Alcune proprietà della quantità di moto areale.

§ 94. — Dalla formola di definizione (§ 81)

$$\mathcal{A} = \int_\tau (\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \mathrm{V}\, k\, d\tau$$

---

[1] La scoperta di questo teorema risale quasi contemporaneamente (1746) a Euler, a D. Bernoulli e a d'Arcy (cfr. LAGRANGE, *Mécanique Analytique,* Partie II, sec. I).

segue che

1) la quantità di moto areale rispetto ad un polo, ad un istante, di un corpo naturale è la somma delle quantità di moto areali omologhe delle singole parti, in cui il corpo s'immagini comunque decomposto:

2) la quantità di moto areale rispetto ad un polo, ad un istante, corrispondente ad un atto di movimento composto di più altri, è la somma delle quantità di moto areali omologhe, corrispondenti ai singoli atti di movimento.

La prima proprietà si riconosce immediatamente, la seconda in base alla proprietà distributiva del prodotto vettore.

§ 95. — La quantità di moto areale rispetto ad un polo, o ad una retta, in un atto di movimento, per cui la velocità di ogni punto è parallela al raggio congiungente il punto col polo, o, rispettivamente, parallela alla perpendicolare alla retta, passante pel punto, è nulla.

§ 96. — Nell'ipotesi dell'atto di movimento traslatorio, indicandone con $\overline{\mathbf{V}}$ la velocità, che sarà quella del centro di massa, si ha

$$(1) \qquad \mathcal{A} = \int_\tau (\mathrm{P}-\mathrm{O}) k d\tau \wedge \overline{\mathbf{V}} = (\overline{\mathrm{P}}-\mathrm{O}) \wedge m \overline{\mathbf{V}} = (\overline{\mathrm{P}}-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{Q}\,.$$

Così, la quantità di moto areale rispetto al centro di massa come polo riesce nulla.

§ 97. — Nell'ipotesi dell'atto di movimento rotatorio, indicando con ω e con ρ la grandezza della velocità angolare e quella della perpendicolare all'asse, passante pel punto generico, la grandezza della quantità di moto areale rispetto all'asse (componente secondo l'asse della quantità di moto areale rispetto ad un punto qualunque dell'asse) risulta (cfr. § 81)

$$(1) \qquad \int_\tau \rho\, \rho\omega\, k d\tau = \mathrm{K}\omega\,, \qquad \mathrm{K} = \int_\tau k \rho^2 k d\tau\,.$$

La quantità misurata da K, corrispondente all'unità derivata $[l^2 m]$, si chiama il " momento d'inerzia „ del corpo, rispetto alla retta che funge da asse.

Da questo risultato intanto apparisce che condizione necessaria perchè, per l'atto di movimento rotatorio, la quantità di moto areale rispetto ad un punto dell'asse, come polo, sia nulla, è che la velocità angolare sia nulla.

Questa proprietà scaturisce direttamente dalla formazione della quantità di moto areale (§ 81). Poichè, girando, per uno spostamento elementare, le perpendicolari all'asse, passanti pei singoli punti, tutte quante in senso concorde, la quantità di moto areale rispetto all'asse di rotazione riesce il risultante di un sistema di vettori tutti equiorientati, e non può quindi esser nulla, se non sono nulli tutti i vettori, cioè nulla la velocità di tutti i punti, e quindi la velocità angolare. Così, la suddetta condizione si dimostra necessaria.

È poi manifesto che è sufficiente.

§ 98. — Ora, la stessa conclusione si estende immediatamente all'atto di movimento più generale, corrispondente ad uno spostamento elementare, per cui le perpendicolari ad una certa retta, passanti pei singoli punti, girino, fra l'origine e il termine del relativo intervallo di tempo, in senso concorde. Chiameremo questo un " atto di movimento rivolutivo, intorno al supposto asse „: e " movimento rivolutivo intorno ad un asse „, un movimento per cui si verifichi, rispetto all'asse, la stessa proprietà, nel relativo intervallo di tempo, per modo che, per ogni istante, l'atto di movimento sia rivolutivo intorno allo stesso asse.

Notiamo ancora codesta proprietà di tale movimento, la quale

scaturisce pure immediatamente dalla formazione della quantità di moto areale. A parità di valore della quantità di moto areale, rispetto all'asse, di un mobile, potranno le perpendicolari all'asse, passanti pei singoli punti del mobile, possedere, tutte o in parte, una maggiore o minore velocità angolare, e potranno quindi girare intorno all'asse, in uno stesso intervallo di tempo, di un angolo maggiore o minore, quando la lunghezza delle perpendicolari medesime riesca opportunamente minore, o maggiore, a seconda del caso.

Chiameremo brevemente il valor medio della suddetta velocità angolare e del suddetto angolo, rispettivamente, la velocità angolare, al considerato istante, del mobile, e l'angolo di cui il mobile gira, nel considerato intervallo di tempo.

E con ciò potremo ancora dire che, a parità di valore della quantità di moto areale, rispetto al supposto asse, è possibile una maggiore o minor velocità angolare del mobile, ad un istante, ed un giro del mobile per un angolo maggiore o minore, in uno stesso intervallo di tempo, quando il mobile convenientemente si contragga o, rispettivamente, si distenda, in direzione trasversale all'asse.

Nel caso particolare poi dell'atto di movimento rotatorio, e del movimento rotatorio, emerge senz'altro dalle (1) del § 97, che, per un determinato valore della quantità di moto areale rispetto all'asse (o ad un punto dell'asse), la velocità angolare, ad un istante, e l'angolo di rotazione, corrispondente ad un dato intervallo di tempo, sarà tanto maggiore o minore, quanto più piccole o più grandi sono le distanze dei singoli punti dall'asse.

Proprietà del movimento che soddisfa il teorema della conservazione delle aree rispetto ad un asse.

§ 99. — Supponiamo l'asse fisso: o anche di direzione fissa, e passante pel centro di massa, intendendo che il discorso si riferisca al movimento riferito al centro di massa (§ 93).

Dal § 98 segue immediatamente che, se, ad un istante, la velocità di tutti i punti è nulla, non potrà, a nessun istante, l'atto di movimento diventare rivolutivo intorno all'asse, e viceversa.

Quindi, se il corpo è rigido, non potendo l'atto di movimento essere altrimenti che rotatorio intorno al supposto asse, sarà costantemente nullo, nel primo caso, e non potrà mai annullarsi, nel secondo.

Se il corpo è deformabile, e la velocità di tutti i punti nulla ad un istante, supposto che, in seguito, una parte assuma un movimento rivolutivo intorno all'asse, non potrà la parte rimanente rimanere fissa. Ma si rispetterà la prescritta condizione con questo che la stessa parte complementare assuma un movimento rivolutivo, intorno allo stesso asse, in senso contrario, in modo che la somma delle quantità di moto areali delle due parti, rispetto all'asse, si mantenga nulla.

Infine, supposto che l'atto di movimento, ad ogni istante, sia composto di un atto di movimento rotatorio intorno al supposto asse, e dell'atto di movimento corrispondente ad una variazione della lunghezza delle perpendicolari all'asse, passanti pei singoli punti, crescerà o diminuirà la velocità angolare, col contrarsi o, rispettivamente, col dilatarsi del mobile (cfr. §§ 94, 95, 98).

Le applicazioni al movimento che soddisfa il teorema della conservazione delle aree rispetto ad un polo, cioè rispetto ad ogni asse passante pel polo, sono immediate.

Ripresa delle applicazioni all'esperienza (cfr. § 87).

§ 100. — *Movimento dei gravi liberi.* Pel § 86, il momento delle forze motrici di gravità, applicate ai punti di un corpo, rispetto al centro di massa, o centro di gravità, del corpo, è nullo. E per conseguenza il movimento dei gravi liberi, in quanto (cfr. § 87) le relative forze esterne si riducono alle forze di gravità, verifica

il teorema della conservazione delle aree rispetto al centro di massa (§ 92), e lo stesso teorema si può applicare al corrispondente movimento riferito al centro di massa (§ 93).

Reggono quindi per questo movimento le conclusioni del § 98, qualunque possano essere le forze interne, che concorrono a determinare il movimento stesso — forze di coesione, forze elastiche forze muscolari etc.

Ne segue che, se il grave è sensibilmente invariabile, cioè solido, come una pietra, una mazza, un piatto, una palla da cannone o da fucile, girerà continuamente intorno al proprio centro di gravità, se, al principio del movimento, riceverà una giravolta intorno ad esso: e diversamente, com'è, per esempio, il caso che il corpo sia, all' istante iniziale, abbondonato a sè stesso, non girerà mai, cioè il suo movimento sarà traslatorio. Questo è notoriamente conforme alla quotidiana esperienza.

Ne segue ancora che, se il grave è una persona, o un animale, che si sia lasciato cadere in un vano, o abbia spiccato un salto, esso non potrà, coll'aiuto delle proprie forze muscolari, imprimersi un movimento rivolutivo, nè distruggerlo, se esistente, o mutarne il senso. La qual conclusione può parer contraddetta, a tutta prima, da alcuni fatti, come, ad esempio, quello ben noto che il gatto, abbandonato colle quattro zampe in su, si rivolge, nel corso della caduta, per modo da cadere sopra di esse [1]). Ora, si consegue in tal caso uno *spostamento* rotatorio, ma senza *movimento* rotatorio, nè altro movimento, per cui sia rivolutivo l'atto di movimento, o lo spostamento elementare, relativo ad un istante.

Il gatto comincia col raccogliere la testa e le zampe anteriori, mentre distende le zampe posteriori trasversalmente all'asse maggiore del corpo. Gira allora le due parti del corpo, anteriore e posteriore, intorno a detto asse, in senso opposto. E, per un certo

---

[1]) È proverbio popolare in Francia « le chat tombe toujours sur ses pattes ».

angolo, di cui gira la parte anteriore, non deve girar l'altra che di un piccolo angolo, in senso contrario, affinchè le quantità di moto areale delle due parti, rispetto al centro di massa, riescano, ad ogni istante, eguali e di senso contrario (cfr. § 98). Distende poi le zampe anteriori e il collo, mentre invece raccoglie le zampe posteriori. E gira allora la parte posteriore nello stesso senso in cui ha prima girato l'anteriore, quanto occorre per conseguirne il desiderato rivolgimento. Deve intanto girare la parte anteriore in senso contrario al precedente, in modo che, come prima, si elidano mutuamente le rispettive quantità di moto areale, rispetto al centro di massa; e, a tal fine, basta un piccolo giro contrario della prima, che non disfa, ma vale a correggere l'effetto del precedente [1]). Così, questa manovra del gatto illustra il teorema della conservazione delle aree, e contribuisce a confermare la teoria.

Gravi appoggiati a sostegni. Arganetto idraulico. Girandola.

Supposto un grave in riposo, ossia in equilibrio (§ 74), mediante un sostegno, tale particolar condizione è conseguita col concorso delle forze interne, e di codeste due specie di forze esterne, le forze di gravità e le forze di reazione del sostegno. Per la seconda equazione cardinale dell'equilibrio (§ 74), il momento del sistema delle forze motrici esterne rispetto ad ogni punto, come polo, deve essere nullo: ed essendo nullo, per proprio conto, il momento delle forze motrici di gravità rispetto al centro di massa, dev'essere nullo il momento delle forze motrici di reazione del sostegno ri-

---

[1]) Marey verificò il fatto anche in altri animali. Fotografie istantanee della caduta del gatto, presentate da lui all'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Francia, si trovano riprodotte nel numero del 29 ottobre 1894 dei *Comptes Rendus*. Lo stesso numero e i successivi contengono discussioni teoriche sull'argomento di Guyou, Lévy, Deprez, Appell, Lecornu. Peano (*Il principio delle aree* e *la storia di un gatto,* a pag. 31 del vol. V della *Rivista di Matematica)* attribuisce una particolare funzione alla coda, distesa, e girata in senso contrario al resto del corpo.

spetto allo stesso centro di massa. Supponiamo ora che, sorgendo un movimento, colla stessa specie di forze esterne, il momento del sistema delle forze motrici di reazione del sostegno rispetto al centro di massa, si mantenga nullo, com'è nel caso dell'equilibrio. Allora quel movimento soddisfarà il teorema della conservazione delle aree rispetto alla verticale del centro di massa (§ 92); e si potrà quindi verificare la circostanza, fra le altre, che, se una parte del corpo intraprende a girare intorno a codesta verticale, un'altra parte dovrà girare intorno ad essa in senso contrario.

Queste previsioni sono confermate dall'arganetto idraulico, dove una parte è l'acqua effluente dai tubi di scarico, la quale, per la particolare disposizione di questi, *gira,* nell'atto dell'efflusso, rispetto alla verticale del centro di massa, e l'altra è il recipiente, posato sopra un pernio, che gli permette di girare, alla sua volta, intorno alla stessa verticale. Come pure, dalla girandola, dove una parte sono i gas, sviluppati dalla combustione della carica, e l'altra parte il tubo ravvolto a spirale, girevole intorno ad un'asse orizzontale, passante pel centro di massa.

La condizione che il momento delle reazioni del sostegno, rispetto al centro di massa, si mantenga nullo, nel considerato movimento, risulta conseguita colla rimozione dell'attrito della superficie a mutuo contatto del corpo e del sostegno.

Locomozione. Nelle precedenti condizioni, una persona, ritta sul suolo, non potrebbe coll'ajuto delle proprie forze muscolari, imprimersi, dalla quiete, un *movimento* rivolutivo intorno ad un asse passante pel centro di gravità, nè arrestare o invertire simile movimento. Del resto, basta supporre il pavimento orizzontale, e puramente capace di reazioni normali, cioè privo di attrito, perchè ne riesca impossibile che una persona, per mezzo delle proprie forze muscolari, s'imprima dalla quiete un movimento rivolutivo intorno ad un asse verticale, passante pel centro di gravità o arresti o invertisca simile movimento. Difatti, riuscendo nullo il

componente secondo detto asse del momento delle forze di gravità, rispetto al centro di massa, la quantità di moto areale, rispetto allo stesso asse, sarà costante (cfr. § 99).

Sarà sempre possibile uno *spostamento* rotatorio; ma grazie ad una manovra più o meno complicata: per esempio, successivamente distendendo e raccogliendo gli arti di destra e di sinistra, per girare, ogni volta, in senso opposto le due metà, destra e sinistra, del corpo, in modo che la metà raccolta giri di un angolo maggiore di quello di cui gira, nello stesso tempo, la metà distesa (cfr. § 98). Queste previsioni trovano la loro conferma nella difficoltà, da tutti sperimentata, di governare la locomozione sopra un pavimento assai levigato. E ne risulta una nuova forma dell'intervento dell'attrito nella locomozione (cfr. § 88).

Si spiega poi, colle nostre previsioni, come venga più naturale, camminando, di lasciar oscillare le braccia, in senso contrario della relativa gamba. Poichè, in tal modo, si mantiene il valor nullo iniziale della quantità di moto areale, rispetto al centro di massa, il quale non può essere modificato che grazie ad un particolare intervento delle reazioni del suolo.

Ipotesi cosmogonica di Laplace. Laplace [1]), partendo dall'osservazione che il centro del sole, dei pianeti, dei satelliti, si scostano poco da un piano — che dalla giacitura di questo piano si scosta poco la giacitura del piano del movimento di rotazione del sole, dei pianeti, dei satelliti — che il senso del movimento di rivoluzione dei pianeti intorno al sole, del movimento dei satelliti intorno al relativo pianeta, e dei suddetti movimenti di rotazione, riferito a quel senso dei relativi assi, per cui essi formano fra loro angoli acuti, è concorde — che, infine, le orbite dei pianeti sono tutte prossimamente circolari col centro nel sole — ha cercato nell'origine del sistema solare la spiegazione di queste con-

---

[1]) *Exposition du Système du Monde.* Livre V, Chap. VI.

cordanze, ch'è estremamente improbabile siano effetto del caso [1]).

Si supponga che l'atmosfera del sole, allo stato d'incandescenza, si distendesse originariamente, secondo il suddetto piano, fino ad immensa distanza, e, nello stesso tempo, partecipasse al movimento rotatorio del sole, e, raffreddandosi, si andasse progressivamente contraendo, per ridursi infine ai limiti attuali.

Questa atmosfera doveva assorbire le comete che vi penetravano. E ciò vale intanto a spiegare l'inclinazione del piano dell'orbita delle presenti comete e la loro grande eccentricità.

Risultando poi il movimento sensibilmente soggetto alle sole forze interne del sistema (cfr. § 88), e dovendo quindi verificarsi il teorema della conservazione delle aree rispetto al centro di massa, la velocità angolare del movimento rotatorio doveva andare progressivamente crescendo (cfr. § 99).

Ora, un approssimato equilibrio relativo delle parti, da verificarsi, in quanto il movimento fosse paragonabile, in un tempo abbastanza lungo, ad un movimento rotatorio uniforme, intorno ad un asse passante pel centro di massa, richiedeva, per ogni parte, una sensibile eguaglianza della forza motrice effettiva e della forza motrice centrifuga (cfr. § 78). È quindi presumibile che, per le parti più lontane dall'asse, in conseguenza del maggior valore della forza centrifuga, cessasse, ad un certo punto, di verificarsi questa eguaglianza, quanto occorreva perchè queste parti restassero connesse col resto, e allora esse se ne dovevano distaccare. S'intende così come la supposta atmosfera potesse successivamente abbandonare dei pezzi. Ciò che vale a spiegare, insieme colla formazione dei pianeti, le rilevate circostanze del loro movimento.

Laplace suppone che si dovessero staccare delle zone equato-

---

[1]) « Le système planétaire... nous offre donc quarante deux mouvements dont les plans sont inclinés à celui de l'equateur solaire, tout au plus, d'un angle droit. Il y a plus de quatre mille milliards à parier contre un que cette disposition n'est point l'effet du hasard; ce qui forme une probabilitè bien supérieure à celle des événements les plus certains de l'histoire... (LAPLACE, loc. cit.).

riali, le quali poi si concentravano in un nucleo. Ma l'ipotesi di una specie di protuberanza potrebbe bastare a spiegare il distacco di un semplice ammasso.

Basta infine supporre che il movimento di un simile ammasso, subito dopo il distacco, si conservasse prossimamente simile al precedente, perchè il corrispondente movimento relativo al centro di massa, ne risulti un movimento sensibilmente rotatorio uniforme, intorno ad un asse passante pel centro di massa, accompagnato da una progressiva contrazione. Osserviamo ancora che, a cagione della piccolezza dell'ammasso, in confronto del resto, doveva verificarsi per quel movimento il teorema della conservazione delle aree rispetto al centro di massa, allo stesso modo che si verifica pei movimenti di gravità terrestre. E vediamo così che il movimento medesimo doveva dar luogo agli stessi fatti, presunti pel movimento del nucleo. Ciò che vale a spiegare, colla formazione dei satelliti, e, in particolare, degli anelli di Saturno, le circostanze del loro movimento.

Tale è, in sostanza, la celebre ipotesi, la quale, per quanto soggetta ad obiezioni che non torna qua il caso di esaminare, serberà sempre una grande importanza, come saggio dell'applicazione dei principi della Dinamica ad uno dei più ardui problemi della Scienza [1]).

Forza viva di un corpo naturale ad un istante [2]).

§ 101. — " Forza viva „ di un corpo naturale, ad un istante, si chiama la quantità la cui grandezza è rappresentata da

$$(1) \qquad T = \frac{1}{2} \int_{\tau} V^2 k \, d\tau ,$$

[1]) Vuol essere ricordata la riserva di Laplace: « Quoi qu'il en soit de cette origine du système planétaire, que je présente avec la défiance que doit inspirer tout ce qui n'est point un résultat de l'observation et du calcul... » (loc. cit.).

[2]) Hinc *Vis* quoque duplex: alia elementaris, quam et mortuam appello quia in ea nondum existit motus, sed tantum sollecitatio ad motum, qualis est globi

dove i simboli hanno il solito significato. Così, le dimensioni della unità di forza viva risultano espresse da $[l^2 m t^{-2}]$.

Da (1) segue immediatamente che

1) la forza viva di un corpo è la somma delle forze vive delle singole parti, in cui comunque s'immagini decomposto il corpo:

2) condizione necessaria e sufficiente perchè la forza viva, ad un istante, sia nulla, è che sia nulla, allo stesso istante, la velocità $\mathbf{V}$ in ogni punto, cioè nullo l'atto di movimento.

Potenza di un sistema di forze motrici, applicate ai punti di un corpo naturale, corrispondente ad un atto di movimento, ad un istante.

§ 102. — " Potenza „ di un sistema di forze motrici $\mathbf{F}^* k d\tau$, applicate ai punti di un corpo naturale, " corrispondente ad un atto di movimento „, per cui $\mathbf{V}$ è la velocità del punto generico del corpo, si chiama la quantità la cui misura è rappresentata [1]) da

$$(1) \qquad \mathcal{P}^* = \int_\tau \mathbf{V} \times \mathbf{F}^* k \, d\tau .$$

Così, le dimensioni dell'unità di potenza risultano espresse da $[l^2 m t^{-3}]$.

---

in tubo, aut lapidis in funda etiam dum adhuc vinculo tenetur; alia vero vis ordinaria est, cum motu actuali conjuncta, quam voco *vivam*.... Veteres, quantum constat, solius vis mortuae scientiam habuerunt. *Galilaeus* de vi viva (alio licet nomine, imo conceptu) agere coepit, primusque explicuit, quomodo acceleratione gravium descendentium motus nascatur. Eodem modo generaliter colligitur vires aequalium corporum esse ut quadrata celeritatum, et proinde vires corporum in universum esse in ratione composita ex corporum simplice, et celeritatum duplicata.

Specimen Dynamicum. (Ex Actis Erud. Lips. Ann. 1698).

[1]) Cfr. la nota a piedi di pag. 15.

Da (1) segue che

1) la potenza c. s. è eguale alla somma delle potenze competenti alle singole parti, in cui il corpo s'immagini comunque decomposto:

2) se $\mathbf{V}$ è la somma di più termini, cioè l'atto di movimento è composto di più altri, la potenza c. s. è la somma delle potenze omologhe corrispondenti ai singoli atti di movimento:

3) se $\mathbf{F}^*$ è la somma di più termini, — nel qual caso si dice che il sistema di forze motrici $\mathbf{F}^* k d\tau$ è " composto dei sistemi di forze motrici relativi ai singoli termini di $\mathbf{F}^*$ ", — la potenza c. s. è la somma delle potenze omologhe dei singoli sistemi di forze motrici.

La prima proprietà si riconosce immediatamente, la seconda e la terza, in base alla proprietà distribuitiva del prodotto scalare.

Teorema della forza viva (1.ª forma).

§ 103. — Riprendiamo l'equazione fondamentale (§ 64) sotto la forma

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F}, \tag{1}$$

posto

$$\mathbf{F}_e + \mathbf{F}_i = \mathbf{F}.$$

$\mathbf{F}$ si chiama la " forza acceleratrice totale " e il sistema delle forze motrici $\mathbf{F} k d\tau$ applicate ai punti del corpo (cioè il sistema composto dei sistemi delle forze motrici totali esterne e interne (§ 65)), il " sistema totale delle forze motrici, applicate ai punti dello stesso corpo ".

Da (1) si ricava (cfr. §§ 16, 17)

$$\mathbf{V} \times \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d\frac{1}{2}\mathbf{V}^2}{dt} = \mathbf{V} \times \mathbf{F},$$

$$\int_\tau \frac{d\frac{1}{2}\mathbf{V}^2}{dt} k d\tau = \frac{d}{dt}\,\frac{1}{2}\int \mathbf{V}^2 k d\tau = \int_\tau \mathbf{V} \times \mathbf{F}\, k d\tau$$

ossia, per (1) del § 101,

$$\frac{dT}{dt} = \int_{\tau} \mathbf{V} \times \mathbf{F} k d\tau . \tag{2}$$

Leggendo questa formola, coi termini precedentemente definiti, otteniamo il

Teorema. La derivata rispetto al tempo della forza viva di un corpo naturale, ad un istante, è eguale alla potenza del sistema totale delle forze motrici applicate ai punti del corpo, corrispondente all'atto di movimento allo stesso istante.

Questa è la prima forma del teorema della forza viva.

Lavoro di un sistema di forze motrici, applicate ai punti di un corpo naturale, in un intervallo di tempo, corrispondente ad un movimento del corpo naturale nello stesso intervallo [1].

§ 104. — Conveniamo che, indicando un intervallo di tempo con $(t_0 t_1)$, $(t_0 t)$ ecc. sia, salvo indicare il contrario, $t_0 < t_1$, $t_0 < t$ ecc.

Si chiama " lavoro „ di un sistema di forze motrici, $\mathbf{F}^* k d\tau$, applicate ai punti di un corpo naturale ai singoli istanti di un intervallo di tempo $(t_0 t_1)$, " corrispondente ad un movimento nello stesso intervallo „, la quantità la cui misura è rappresentata (cfr. § 102) da

$$L^* = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{P}^* \, dt , \tag{1}$$

ossia da

$$L^* = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\tau} \mathbf{V} \times \mathbf{F}^* k d\tau = \int_{\tau} k d\tau \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{V} \times \mathbf{F}^* \, dt . \tag{1'}$$

---

[1]) Fra i concetti appartenenti ai teoremi generali della Dinamica, quello del lavoro, almeno in forma esplicita, è il più recente. Il « *travail* » fu introdotto da Coriolis (*Traité de la Mécanique des corps solides et du calcul de l'effet des machines*. Paris, 1829).

Le dimensioni dell'unità di lavoro risultano così espresse da $[l^2 m t^{-2}]$, come per l'unità di forza viva (§ 101).

Da (1)′ segue immediatamente che

1) il lavoro c. s. corrispondente ad un movimento in un intervallo di tempo è la somma dei lavori corrispondenti ai singoli intervalli parziali, in cui detto intervallo s'immagini comunque diviso.

Dalle analoghe proprietà (1) e 3) del § 102) di $\mathcal{P}^*$ segue poi, per (1), che

2) il lavoro c. s. è la somma dei lavori omologhi competenti alle singole parti, in cui il corpo s'immagini comunque decomposto.

3) il lavoro di un sistema di forze motrici c. s. composto di più altri è la somma dei lavori omologhi dei singoli sistemi di forze motrici.

Teorema della forza viva (2.ª forma).

§ 105. — Da (2) del § 103 si ricava senz'altro

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_0 = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\tau} \mathbf{V} \times \mathbf{F}\, k d\tau .$$

Leggendo la qual formola, coi termini precedentemente definiti, si ottiene il

Teorema. La differenza dei valori della forza viva di un corpo naturale fra il termine e l'origine di un intervallo di tempo qualsivoglia è eguale al lavoro del sistema totale delle forze motrici, applicate ai punti del corpo, ai singoli istanti dell'intervallo, corrispondente al movimento nello stesso intervallo.

Questa è la seconda forma, o forma normale, del teorema della forza viva.

Potenza di un sistema di forze motrici ecc. corrispondente ad un atto di movimento rigido.

§ 106. — Se l'atto di movimento è rigido, indicando, al solito, con $\mathbf{V}$ la velocità competente al punto generico P, con $\mathbf{V}_0$ la velocità competente ad un punto particolare O, e con $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare, si ha

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O).$$

Quindi (§ 102)

$$\mathcal{P}^* = \int_\tau \mathbf{V}_0 \times \mathbf{F}^* k d\tau + \int_\tau [\boldsymbol{\omega} \wedge (P-O)] \times \mathbf{F}^* k d\tau .$$

Ora, indicando con $\mathbf{R}^*$ e con $\mathbf{M}_0^*$ il risultante e il momento rispetto al punto O del considerato sistema di forze motrici, per modo che

$$\mathbf{R}^* = \int_\tau \mathbf{F}^* k d\tau , \qquad \mathbf{M}_O^* = \int_\tau (P-O) \wedge \mathbf{F}^* k d\tau$$

si ha, senz'altro,

$$\int_\tau \mathbf{V}_0 \times \mathbf{F}^* k d\tau = \mathbf{V}_0 \times \mathbf{R}^* :$$

ed essendo

$$[\boldsymbol{\omega} \wedge (P-O)] \times \mathbf{F}^* = \boldsymbol{\omega} \times [(P-O) \wedge \mathbf{F}^*],$$

anche

$$\int_\tau [\boldsymbol{\omega} \wedge (P-O)] \times \mathbf{F}^* k d\tau = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}_0^* .$$

Per cui

$$\mathcal{P}^* = \mathbf{V}_0 \times \mathbf{R}^* + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}_0^* . \tag{1}$$

Osservazione. Per l'atto di movimento traslatorio di velocità $\mathbf{V}$, e per l'atto di movimento rotatorio la cui velocità angolare è

ω e l'asse passa pel punto O, si ha quindi rispettivamente

$$\mathcal{P}^* = \mathbf{V} \times \mathbf{R}^* \tag{2}$$

$$\mathcal{P}^* = \omega \times \mathbf{M}_0^* . \tag{3}$$

§ 107. — *Corollario* I. La potenza di un sistema di forze motrici interne, applicate ai punti di un corpo naturale, corrispondente ad un atto di movimento rigido, è nulla.

Difatti, in tal caso (§§ 66, 67),

$$\mathbf{R}^* = 0 \ , \qquad \mathbf{M}_0^* = 0 .$$

Osservazione. Osserviamo che la prima relazione verificandosi senz'altro, per la legge dell'eguaglianza dell'azione e della reazione (§ 66), la seconda relazione, che traduce il postulato del momento delle forze interne (§ 67), si ritrova, in conseguenza di (1), stabilendo, se si vuole, il postulato che, per ogni sistema di forze interne, la potenza corrispondente ad un atto di movimento rigido sia nulla.

§ 108. — *Corollario* II. Il lavoro di un sistema di forze motrici interne, applicate ai punti di un corpo naturale, corrispondente ad un movimento rigido, è nullo.

Teorema della forza viva per un insieme di corpi rigidi.

§ 109. — Sia il mobile rappresentato da una riunione di corpi, a ciascun dei quali sia imposto il vincolo del movimento rigido. Essendo nullo, per ciascuno, il lavoro del sistema delle forze motrici interne, si riduce il lavoro del sistema totale al lavoro delle forze motrici esterne rispetto ai singoli corpi (§ 104, 3)), e si ha il

Teorema. La differenza dei valori della forza viva di un mobile, rappresentato da una riunione di corpi rigidi, tra il termine e l'origine di un intervallo di tempo, è eguale al lavoro del si-

stema delle forze motrici esterne *rispetto ai singoli corpi rigidi,* applicate ai punti del mobile, corrispondente al movimento nello stesso intervallo.

Teorema della forza viva nel movimento relativo.

§ 110. — Il teorema della forza viva si estende senz'altro al movimento relativo ad una terna d'assi mobili, computando nel sistema totale delle forze motrici le forze motrici apparenti del movimento relativo (§ 76). Ora, in conseguenza di

$$\mathbf{V}_R \times [\mathbf{V}_R \wedge \omega] = [\mathbf{V}_R \wedge \mathbf{V}_R] \times \omega = 0\,,$$

il lavoro del sistema delle forze motrici centrifughe è nullo. E si ha quindi (§ 104, 3)) il

Teorema. La differenza dei valori della forza viva di un corpo nel suo movimento relativo ad una terna d'assi mobili considerati come fissi, fra il termine e l'origine di un intervallo di tempo, è eguale al lavoro, corrispondente al movimento relativo in discorso, nello stesso intervallo di tempo, del sistema totale delle forze motrici appartenenti al movimento assoluto, aumentato del lavoro omologo delle eguali e contrarie alle forze motrici di trascinamento (nel caso del movimento rotatorio uniforme degli assi, lavoro del sistema delle forze motrici centrifughe).

Teorema di König.

§ 111. — Il movimento degli assi, di cui al precedente §, sia traslatorio con velocità $\mathbf{V}_S$. Sarà

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_S + \mathbf{V}_R\,,$$

donde

$$\mathbf{V}^2 = \mathbf{V}_S^2 + \mathbf{V}_R^2 + 2\,\mathbf{V}_S \times \mathbf{V}_R\,,$$

$$\frac{1}{2}\int_\tau \mathbf{V}^2 k d\tau = \frac{1}{2}\,\mathbf{V}_S^2 \int_\tau k d\tau + \frac{1}{2}\int_\tau \mathbf{V}_R^2\, k d\tau + \mathbf{V}_S \times \int_\tau \mathbf{V}_R\, k d\tau\,,$$

ossia

$$T = \frac{m V_S^2}{2} + T_R + V_S \times m \overline{V}_R, \tag{1}$$

indicando con T_R e $\overline{V}_R$ la forza viva del corpo considerato e la velocità del suo centro di massa, nel movimento relativo agli assi mobili considerati come fissi.

Supponiamo ora che l'origine degli assi mobili sia lo stesso centro di massa (o, ciò che fa lo stesso, che il centro di massa sia invariabilmente unito ai supposti assi mobili), con che il movimento relativo in discorso riesce il movimento riferito al centro di massa (§ 91). Allora $V_S = \overline{V}$, $\overline{V}_R = 0$, e la (1) diventa

$$T = \frac{m \overline{V}^2}{2} + T_R. \tag{2}$$

Questo è il Teorema di König.

Lavoro elementare.

§ 112. — " Lavoro elementare „ del consueto sistema di forze motrici $F^* k d\tau$ si chiama la quantità la cui misura è

$$DL^* = \mathcal{P}^* Dt, \tag{1}$$

con Dt infinitesimale: cioè il lavoro dello stesso sistema di forze motrici corrispondente allo spostamento elementare, o infinitesimale, del mobile, fra il tempo t e il tempo $t + Dt$.

Si ha, in tale ipotesi, omettendo l'aggiunta degli infinitesimali d'ordine superiore,

$$V Dt = Ds,$$

rappresentando con Ds lo spostamento elementare, o infinitesimale, del punto generico del mobile.

Quindi, per (1) (cfr. § 102),

$$\text{(2)} \qquad DL^* = \int_\tau Ds \times \mathbf{F}^* k d\tau = \int_\tau \mathbf{F}^* \times Ds\, k d\tau .$$

Diverse forme dell'espressione del lavoro.

§ 113. — Indicando con x, y, z le coordinate del punto generico del mobile al tempo t, e con X^*, Y^*, Z^* le componenti di $\mathbf{F}^*$ secondo gli assi coordinati, si ha, in forma scalare,

$$\mathbf{V} \times \mathbf{F}^* = \mathbf{F}^* \times \mathbf{V} = X^* \frac{dx}{dt} + Y^* \frac{dy}{dt} + Z^* \frac{dz}{dt} .$$

Quindi

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{V} \times \mathbf{F}^* dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(X^* \frac{dx}{dt} + Y^* \frac{dy}{dt} + Z^* \frac{dz}{dt} \right) dt \\ \displaystyle\qquad = \int (X^* dx + Y^* dy + Z^* dz) : \end{cases}$$

dove, nel terzo membro, i differenziali dx, dy, dz possono essere riferiti egualmente a t, o ad un'altra variabile d'integrazione qualunque, purchè in corrispondenza biunivoca con t, nell'intervallo (t_0, t_1), e i limiti dell'integrale sottintesi vanno determinati in conseguenza.

Per esempio, quando il movimento del punto, a cui si riferisce (1), nell'intervallo di tempo (t_0, t_1), sia progressivo, questa variabile potrà essere la misura dell'arco di trajettoria del punto, avente per origine un certo punto fisso, e per termine il posto del punto al tempo t.

Si ottiene così l'espressione, spesso adoperata, del lavoro

$$\text{(2)} \qquad L^* = \int_\tau k d\tau \int (X^* dx + Y^* dy + Z^* dz) .$$

Riflessioni sul concetto del teorema della forza viva e del lavoro.

§ 114. — Il teorema della forza viva si distingue dai due precedenti teoremi generali principalmente pel fatto che la potenza e il lavoro — che forniscono rispettivamente la derivata rispetto al tempo, ad un istante, e la differenza dei valori fra il termine e l'origine di un intervallo di tempo, di quell'elemento del moto attuale che è la forza viva — implicano direttamente lo stesso moto attuale, e non si possono ricondurre, almeno, per ogni posizione del mobile, alle sole circostanze determinatrici del movimento: le quali non contribuiscono che in parte alla formazione di quelle quantità, per mezzo del sistema delle forze motrici.

Tuttavia il teorema stesso non ha minore importanza per le applicazioni: e codesta gli è conferita dal concetto inerente al lavoro, per cui esso riesce una quantità di efficace uso pratico, e dalle proprietà dello stesso lavoro, per alcune specie molto generali di forze motrici.

Riservandoci di considerare in seguito tali proprietà, cominciamo ora coll'esaminare il concetto del lavoro, quale scaturisce dalla sua definizione (§ 104).

§ 115. — Sia perciò, in primo luogo, il caso più semplice di un sistema di forze motrici $\mathbf{F}^* k d\tau$, per cui $\mathbf{F}^*$ è indipendente dal posto del punto nel campo τ, rappresentante il mobile al tempo generico t, e dallo stesso tempo t.

Premettiamo che, per la prima indipendenza, sarà

$$\mathbf{R}^* = \int_\tau \mathbf{F}^* k d\tau = m\,\mathbf{F}^*$$

$$\mathbf{M}^* = \int_\tau (\mathrm{P}-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{F}^* k d\tau = m(\overline{\mathrm{P}}-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{F}^* = (\overline{\mathrm{P}}-\mathrm{O}) \wedge \mathbf{R}^* :$$

per cui si dice che il risultante $\mathbf{R}^*$, altrimenti chiamato forza motrice appartenente al considerato sistema di forze motrici, applicate ai punti del corpo, ammette il centro di massa $\overline{P}$ per suo punto di applicazione, o anche che è applicato al centro di massa (cfr. § 86).

Abbiamo poi

$$L^* = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_\tau \mathbf{V} \times \mathbf{F}^* k d\tau = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_\tau \mathbf{V}\, k d\tau \times \mathbf{F}^*$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} m \overline{\mathbf{V}}\, dt \times \mathbf{F}^* = \int_{t_0}^{t_1} \overline{\mathbf{V}}\, dt \times \mathbf{R}^* = (\overline{P}_1 - \overline{P}_0) \times \mathbf{R}^* .$$

Quindi il lavoro riesce rappresentato dal prodotto scalare dello spostamento del centro di massa e del risultante. Ossia il lavoro riesce la quantità la cui misura è data dal prodotto delle grandezze dello spostamento del punto d'applicazione della forza motrice considerata e della forza motrice stessa, moltiplicato pel coseno dell'angolo formato dalle loro orientazioni.

Ora, se s'immagina, per un momento, che la forza motrice in discorso rappresenti uno sforzo applicato ad un punto, in conseguenza del quale il punto si move — sforzo, che potremo intendere rilevato, come abbiamo osservato avvenire per la forza motrice di gravità (§ 59), mediante un dinamometro, o le nostre proprie sensazioni muscolari — il concetto famigliare del lavoro di questo sforzo, corrispondente ad un movimento del suo punto d'applicazione, implica, senza dubbio, in forma intuitiva 1) che le grandezze dello spostamento del punto d'applicazione e dello sforzo siano coefficienti della grandezza del lavoro, 2) che, in conseguenza di un altro coefficiente, tale grandezza sia tanto maggiore quanto più la direzione dello spostamento si accosta alla direzione dello sforzo, 3) che un significato, in certo qual modo, opposto competa

ai due casi che il senso dello spostamento sia conforme o contrario al senso dello sforzo.

Si riconosce, senz'altro, come codeste circostanze si mantengono nella precedente espressione della misura del lavoro, e vi sono precisate in un modo che sarebbe fuor di luogo chiamare arbitrario, perchè, per una considerazione pregiudiziale, altre volte rilevata, il semplice concetto intuitivo di una quantità è di tal natura da non prestarsi, per sè stesso, ad una misura della quantità.

Lo spostamento del punto di applicazione si dice concorde colla forza motrice, o discorde, secondo che la sua orientazione forma angolo acuto o ottuso con quella della forza motrice. Così, nel caso in discorso, il lavoro riesce positivo o negativo, secondo che lo spostamento del punto d'applicazione è concorde colla forza motrice, o discorde. Quando l'angolo delle due orientazioni è retto, il lavoro riesce nullo.

§ 116. — Per fare una semplice applicazione ad un caso concreto, supponiamo che, per mezzo di uno sforzo uniforme, applicato ad una fune, girante nella gola di una carrucola, si sollevi, o si faccia lentamente discendere, un carico, appeso alla stessa fune. In tal caso, sono applicate al centro di massa del carico due forze motrici — l'una, la forza motrice peso, avente la orientazione della verticale volta in basso — l'altra, uno sforzo, la cui direzione è segnata dalla direzione della fune tesa dalla parte del carico, e perciò, intese evitate le oscillazioni della fune, avente, alla sua volta, l'orientazione della verticale volta in alto. Quando il carico s'innalza, il lavoro della prima è negativo, e positivo quello della seconda: e viceversa, quando il carico si lascia discendere. In ogni caso poi, la grandezza del lavoro, corrispondente ad un tratto di corsa del centro di massa del carico, è data, per la prima, dal prodotto della grandezza del peso del carico e del tratto di corsa, e, per la seconda, dal prodotto delle grandezze dello sforzo e del tratto medesimo.

§ 117. — Passando ora al caso di un sistema di forze motrici qualsivoglia, applicate ai punti di un corpo, le condizioni del caso precedente si verificheranno per una parte del corpo e per un intervallo parziale di tempo, con tanta maggior approssimazione, quanto più piccolo è il raggio di una sfera capace di contenere la parte, e più breve l'intervallo di tempo. Per cui, — essendo il lavoro di un sistema di forze motrici, applicate ai punti di un corpo qualunque, corrispondente ad un movimento in un intervallo di tempo pure qualunque, la somma dei lavori omologhi, appartenenti ai singoli intervalli parziali, in cui l'intervallo di tempo s'immagini comunque diviso (§ 104, 1)), e alle singole parti, in cui comunque s'immagini decomposto il corpo (§ 104, 2)), — si riconosce, senz'altro, con una considerazione di limite, la connessione esistente fra il caso generale in discorso e il premesso caso particolare.

Diciamo poi, conformemente ai termini precedentemente adoperati (§ 175), che lo spostamento elementare di un punto qualunque del corpo, relativo ad un istante, è concorde colla forza motrice della supposta specie, applicata al corrispondente elemento del corpo, oppure discorde, secondo che è acuto o ottuso l'angolo formato dai vettori **V** e $\mathbf{F}^*$, calcolati per quel punto e per quell'istante.

Vediamo allora che, se in tutti i punti, e ad ogni istante, lo spostamento elementare è concorde colla forza motrice applicata al corrispondente elemento, oppure discorde, il lavoro del considerato sistema di forze motrici, applicate ai punti del corpo, corrispondente al suo movimento, nel supposto intervallo di tempo, sarà rispettivamente positivo o negativo. Mentre poi, perchè lo stesso lavoro risulti positivo o negativo, basterà che il primo o il secondo caso predominino nel tempo e nella massa.

Il lavoro nullo si avrà, alla sua volta, quando, ad ogni istante, e in ogni punto, i due vettori **V** e $\mathbf{F}^*$ saranno fra loro perpendi-

colari, oppure i due suddetti casi contrarii, nel tempo, e nella massa, si compenseranno mutuamente.

§ 118. — Pel teorema della forza viva, secondo che, nel considerato intervallo, il lavoro del sistema totale delle forze motrici, applicate ai punti del mobile, è positivo o negativo, si verifica, fra il termine e l'origine dell'intervallo di tempo, una differenza positiva o negativa, rispettivamente, della forza viva, cioè un aumento o una diminuzione della forza viva del mobile.

Nelle applicazioni, si suol considerare, nel primo caso, l'aumento di forza viva come “ raccolto „, “ colla spesa „ del corrispondente lavoro del sistema totale delle forze motrici, applicate ai punti del mobile: e, nel secondo caso, il lavoro negativo dello stesso sistema totale delle forze motrici, applicate ai punti del mobile, come “ raccolto „, “ colla spesa „ della corrispondente diminuzione della forza viva del mobile.

La ragione di questi termini sta in questo, che, nel primo caso, si riferisce il frutto del procedimento all'aumento di velocità dei punti del mobile, conseguito coll'applicazione di un sistema di forze motrici, tali che predomina, nel tempo e nella massa, il caso dello spostamento elementare concorde colla relativa forza motrice; e, nel secondo caso, il frutto del procedimento si riferisce al movimento del corpo, tale che predomina, nel tempo e nella massa, il caso dello spostamento elementare discorde dalla relativa forza motrice, conseguito per mezzo di una distribuzione di velocità nei punti del corpo, al principio del procedimento medesimo.

Unità di lavoro e di potenza.

§ 119. — Nel sistema (C. G. S.) (§ 62) l'unità di lavoro si chiama l'“ erg „, ed è il lavoro corrispondente allo spostamento, per la lunghezza di un centimetro, del punto d'applicazione di una forza motrice della grandezza di una dina (§ 62), a parità d'orientazione

dello spostamento e della forza motrice. L'unità multipla 10^7 erg si chiama il " joule ".

Nella Pratica, si usa pure come unità di lavoro il " chilogrammetro " (Kgm), che rappresenta il lavoro corrispondente allo spostamento, per la lunghezza di un metro, del punto d'applicazione di una forza motrice della grandezza di un chilogrammo-peso (Kg) (§ 62), a parità di orientazioni dello spostamento e della forza motrice. Essendo (§ 62)

$$\text{Kg} = 10^5 g \text{ dine},$$

si ha

$$\text{Kgm} = g \text{ joule}.$$

§ 120. — La potenza, conformemente a

$$\mathcal{P}^* = \frac{d\mathrm{L}^*}{dt},$$

rappresenta lavoro riferito all'unità di tempo, ed è pure una quantità d'uso pratico.

Nel sistema (C. G. S.) l'unità di potenza riesce $\frac{\text{erg}}{\text{sec}}$. L'unità multipla $10^7 \frac{\text{erg}}{\text{sec}}$ si chiama il " watt ".

Nella Pratica, si usa più spesso come unità di potenza il " cavallo-vapore " (Cav.), potenza corrispondente al lavoro di 75 chilogrammetri per secondo, e si ha così

$$\text{Cav.} = 736 \text{ watt}.$$

Applicazione alle macchine.
Principio della trasmissione del lavoro [1].

§ 121. — Una macchina della Tecnica, destinata a " fornire un lavoro " di qualsiasi specie, si può schematicamente ridurre

[1]) Appartiene a CORIOLIS. *(Op. cit.* a pag. 103).

ad una riunione di pezzi, prevalentemente solidi, collegati in modo che il movimento di alcuni di essi comanda il movimento degli altri; dove, ad alcuni pezzi — *organi motori* — è applicato un sistema di forze motrici, a disposizione del meccanico, — *potenze motrici* —, il cui lavoro, nel movimento normale della macchina, è positivo — *lavoro motore* —, col risultato che altri pezzi — *utensili* —, a cui è applicato, parimente dal meccanico, un certo sistema di forze motrici — *resistenze utili* —, si movano in un modo determinato, a cui corrisponde un lavoro negativo delle resistenze utili — *lavoro utile* —, che forma lo scopo della macchina; nel medesimo tempo che a tutti i pezzi riesce applicato un sistema di forze motrici, inerente alle condizioni della macchina, il cui lavoro, essenzialmente negativo, non è compreso negli scopi della macchina, per modo che codeste forze motrici si chiamano *resistenze passive,* e il loro lavoro si dice *lavoro passivo.*

Potenze motrici sogliono essere le forze di gravità — come in un mulino, mosso da una cascata d'acqua, la quale è da considerarsi come organo motore — le forze muscolari degli animali e dell'uomo, le tensioni elastiche del vapor d'acqua, o di una miscela tonante, le forze elettro-magnetiche ecc. Resistenze utili potranno essere le stesse forze di gravità — in una macchina destinata a sollevare carichi — le forze di coesione — in una macchina destinata a tornire, a perforare, a polverizzare ecc. — le forze elastiche, le stesse forze elettro-magnetiche ecc. Resistenze passive sono principalmente le forze d'attrito e di resistenza dell'aria.

Notiamo che le resistenze d'attrito, per quanto diano luogo ad un lavoro estraneo allo scopo della macchina, contribuiscono di regola al funzionamento della macchina stessa.

E facciamo ancora l'osservazione importante che le forze di coesione dei pezzi solidi, in quanto il loro movimento si può considerare come rigido, danno luogo ad un lavoro nullo (§ 108): vale a dire, codeste forze non figurano nel computo del lavoro di nessuna specie.

§ 122. — Pel teorema della forza viva (§ 105), indicando con T_0 e T i valori della forza viva totale di tutti i pezzi, o forza viva della macchina, all'origine e al termine di un intervallo di tempo qualunque; con L_m, $-L_u$ e $-L_p$ i lavori motore, utile e passivo, rispettivamente: *e ammesso che il lavoro di ogni eventuale sistema di forze motrici non compreso fra i nominati risulti nullo, o trascurabile,* si ha

$$(1) \qquad T - T_0 = L_m - L_u - L_p .$$

La macchina va in principio portata dalla quiete, per cui è $T_0 = 0$, ad una condizione di movimento, per cui la forza viva è T_1. E perciò, distinguendo coll'indice 1 i lavori corrispondenti al movimento in codesto intervallo di tempo, la (1) fornisce

$$T_1 = L_m^{(1)} - L_u^{(1)} - L_p^{(1)} ,$$

la quale implica

$$L_m^{(1)} > (L_u^{(1)} + L_p^{(1)}) .$$

Si procura poi che la forza viva della macchina si mantenga, per quanto è possibile, sensibilmente costante, e questo si chiama lo "stato di regime„ della macchina. Allora la (1) fornisce, per un intervallo di tempo qualunque,

$$(2) \qquad L_u = L_m - L_p ,$$

" equazione di regime „.

In ogni caso, regge la stessa equazione per ogni "ciclo„: cioè per ogni intervallo di tempo, al termine del quale la macchina riprende le condizioni del principio.

Questa equazione rappresenta il principio introdotto da Coriolis col nome di principio della trasmissione del lavoro. Coi quali termini s'intende esprimere che, nello stato di regime, o nel corso di ogni ciclo, avviene, in certo qual modo, come se, per mezzo della macchina, il lavoro motore si trasformasse in lavoro utile, colla perdita del lavoro passivo.

Se fra il termine e l'origine di un intervallo di tempo si verifica una differenza di forza viva, la (1) scritta sotto la prima o la seconda delle due forme

$$L_u = (L_m + T_0 - T_1) - L_p \ , \qquad L_u = L_m - (L_p + T_1 - T_0),$$

secondo che è $T_0 > T_1$ oppure $T_1 > T_0$, mostra, stando al confronto con (2), che una diminuzione di forza viva conta come lavoro motore, e un aumento come lavoro passivo.

§ 123. — Il precedente discorso si estende facilmente a quella specie di macchine, di cui piuttosto è diretto scopo determinare e mantenere un certo movimento delle proprie parti: per modo che non comparisce più, nel loro andamento, un lavoro negativo, che possa propriamente chiamarsi lavoro utile. Tale è il caso delle macchine locomotrici, in genere. Basta, a tal fine, sopprimere le resistenze utili. Le equazioni (1), (2) forniscono tuttavia interessanti conseguenze.

Esempio [1]. Sia una bicicletta in movimento sopra un piano orizzontale, e si mantengano orizzontali gli assi delle ruote e dei pedali.

Potremo intendere, tenendo conto che, mentre una gamba del cavaliere si abbassa, l'altra s'innalza, che il movimento del centro di massa del mobile, formato collettivamente dalla bicicletta e dal cavaliere, sia orizzontale. Allora, non vi ha più luogo a tener calcolo del lavoro delle forze motrici di gravità, il quale riesce nullo.

Il sistema delle potenze motrici si riduce agli sforzi, applicati dai piedi del cavaliere, alternativamente, alle due staffe, nel mezzo giro discendente, e *si rappresenta* per mezzo di due sforzi, applicati all'estremità del relativo pedale, e, grazie al giro della

---

[1]) È usato il concetto di «pressione» di cui si discorre nella prima parte dell'Appendice.

staffa, d'orientazione costante, — verticale d'alto in basso. Ammetteremo ancora che sia costànte la grandezza comune, S, di ciascuno dei due sforzi.

Indicando con r la lunghezza comune dei due pedali, e con φ l'angolo di rotazione, contato da un asse verticale, volto in alto, all'istante generico dell'intervallo di tempo corrispondente ad un mezzo giro in discesa, il lavoro elementare del relativo sforzo, corrispondente all'incremento $d\varphi$ dell'angolo di rotazione, sarà misurato da

$$r d\varphi\, S(-\sin\varphi) = -r\, S \sin\varphi\, d\varphi .$$

Per cui, prendendo in considerazione anche l'altro pedale, la misura del lavoro motore, corrispondente ad un intero giro dei pedali, sarà

$$-2 r S \int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi = 4 r S .$$

vale a dire, pel movimento corrispondente ad un intero giro dei pedali,

$$L_m = 4 r S .$$

Le resistenze, non essendo scopo diretto della macchina di raccogliere un lavoro, conformemente a quanto si è osservato precedentemente, in generale, vanno, nel presente caso, tutte ascritte alla classe delle resistenze passive.

Prime fra codeste, compariscono le pressioni di attrito volvente, applicate alle due ruote, che distingueremo coi numeri 1 e 2, in conseguenza del loro rotolamento senza strisciamento sul suolo. Indichiamo con φ_i $(i = 1, 2)$ l'angolo di rotazione di una ruota, intorno al proprio asse di figura, contato come φ. Lo spostamento elementare, corrispondente all'incremento da φ_i a $\varphi_i + d\varphi_i$, della ruota è uno spostamento rotatorio, intorno ad un asse parallelo

al suddetto, passante pel punto di contatto della ruota col suolo, con rotazione di grandezza $d\varphi_i$. Quindi il lavoro elementare delle nominate pressioni di attrito volvente, corrispondente allo stesso spostamento, avrà per misura (cfr. (3) del § 106).

$$d\varphi_i \,.\, M_i \,.\, \cos \alpha_i \,;$$
$$(i = 1\,, 2)$$

dove M_i indica la grandezza del momento delle pressioni di attrito volvente rispetto al punto di contatto della ruota col suolo, e α_i l'angolo che questo momento forma colla velocità angolare al supposto istante. Ma, per le leggi di Coulomb,

$$M_i = \nu_i R_i \,, \qquad \alpha_i = \pi \,,$$

indicando con ν_i un coefficiente positivo, dipendente dalla natura del materiale del cerchio della ruota e del suolo, e con R_i la grandezza della reazione normale del suolo sulla ruota considerata. Ne segue, per misura del suddetto lavoro elementare,

$$-\nu_i R_i \, d\varphi_i \,.$$
$$(i = 1\,, 2)\,.$$

Competano 1 e 2 rispettivamente alla ruota motrice e alla ruota direttrice, e r_1, r_2 ne dinotino i raggi.

Per la ruota motrice sarà

$$d\varphi_1 = q\, d\varphi \,,$$

indicando q il rapporto del numero dei denti della ruota dentata annessa al pedale al numero dei denti di quella annessa al mozzo della stessa ruota motrice.

E per la ruota direttrice

$$d\varphi_2 = \frac{r_1}{r_2}\, d\varphi_1 = q\, \frac{r_1}{r_2}\, d\varphi \,.$$

Si conclude che il lavoro elementare delle pressioni di attrito volvente, applicate ad ambedue le ruote, corrispondente all'incremento da φ a $\varphi + d\varphi$ dell'angolo di rotazione dei pedali, ha per misura (supposto $\nu_1 = \nu_2 = \nu$)

$$-q\nu\left(R_1 + \frac{r_1}{r_2}R_2\right)d\varphi:$$

e il lavoro delle stesse pressioni, corrispondente ad un intero giro dei pedali,

$$-2\pi q\nu\left(R_1 + \frac{r_1}{r_2}R_2\right).$$

Rappresentiamo con $-2\pi L'_p$ il lavoro delle rimanenti resistenze passive, corrispondente egualmente ad un intero giro dei pedali. Codeste saranno le pressioni di attrito interno, e di deformazione degli organi, intrinseche alla macchina, ed inoltre la resistenza dell'aria, ed eventualmente quella del vento.

Nello stato di regime, quando cioè la forza viva, o, in sostanza, la velocità di trasporto, mantenga un valore costante, o almeno riprenda lo stesso valore, al compiersi di ogni giro dei pedali, abbiamo quindi l'equazione ((2) del § 122)

$$4rS = 2\pi\left[q\nu\left(R_1 + \frac{r_1}{r_2}R_2\right) + L'_p\right],$$

donde

$$S = \frac{\pi}{2}\frac{1}{r}\left[q\nu\left(R_1 + \frac{r_1}{r_2}R_2\right) + L'_p\right].$$

Sarà prossimamente $R_1 + R_2 = P$, grandezza del peso complessivo della macchina e del cavaliere. Quindi, supponendo, per approssimazione, $r_1 = r_2$,

$$S = \frac{\pi}{2}\frac{1}{r}(q\nu P + L'_p).$$

Definizione del potenziale di un sistema di forze motrici applicate ai punti di un corpo naturale.

§ 124. — Funzione della posizione di un mobile chiamiamo, in generale, una variabile i cui valori sono univocamente determinati dalla posizione del mobile. Codesta funzione, al solito, sarà da noi supposta regolare. Quando la posizione del mobile riesce determinata da un certo numero di parametri, la funzione della posizione del mobile diventa manifestamente una funzione di questi parametri.

§ 125. — " Potenziale „ di un sistema di forze motrici, applicate ai punti di un corpo naturale, chiamiamo una funzione della posizione del corpo naturale, tale che la differenza de' suoi valori, per due diverse posizioni del corpo, è eguale al lavoro del sistema delle forze motrici, corrispondente ad un movimento qualunque del corpo, per cui posizione iniziale e finale sono le due posizioni relative al sottraendo e al minuendo della suddetta differenza.

Vale a dire, indicando con W^* il potenziale del sistema delle forze motrici $\mathbf{F}^* k d\tau$, applicate ai punti del solito mobile, sarà

$$\mathrm{W}_1^* - \mathrm{W}_0^* = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_\tau \mathbf{V} \times \mathbf{F}^* k d\tau,$$

W_0^* e W_1^* indicando i valori di W^*, per le posizioni del mobile, relative ai tempi t_0 e t_1.

Osservazione. Il potenziale, per ogni sistema di forze motrici, applicate ai punti di un mobile, non è definito che salvo una costante additiva arbitraria.

Casi importanti di esistenza del potenziale.

§ 126. — Quando esiste una funzione U^* del punto generico P del campo τ, rappresentante il mobile al tempo qualunque t; e, se capita, dello stesso tempo t, tale che, indicando con $\mathbf{F}^*_s$ la componente di $\mathbf{F}^*$ secondo un asse qualsivoglia, e con s la coordinata di P relativa a questo asse (condotto per un punto qualunque, e con un'origine pure qualunque), sia

$$\mathbf{F}^*_s = \frac{\partial U^*}{\partial s}, \tag{1}$$

U^* si chiama la "funzione delle forze acceleratrici $\mathbf{F}^*$". E se U^* è funzione puramente del punto P, essa si dice funzione delle forze "indipendente dal tempo".

Notiamo che condizione necessaria e sufficiente perchè si verifichi (1), per un asse qualunque, è che, indicando con X^*, Y^*, Z^* le componenti di $\mathbf{F}^*$ secondo una terna di assi coordinati ordinarii, si abbia

$$X^* = \frac{\partial U^*}{\partial x}, \quad Y^* = \frac{\partial U^*}{\partial y}, \quad Z^* = \frac{\partial U^*}{\partial z}. \tag{2}$$

§ 127. — Supponiamo che esista per $\mathbf{F}^*$ funzione delle forze, U^*, indipendente dal tempo (§ 126). Sarà, per (2),

$$X^* \frac{dx}{dt} + Y^* \frac{dy}{dt} + Z^* \frac{dz}{dt} = \frac{\partial U^*}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U^*}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U^*}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{dU^*}{dt}.$$

Quindi (cfr. (1) del § 113)

$$\int_\tau \mathbf{V} \times \mathbf{F}^* k d\tau = \int_\tau \frac{dU^*}{dt} k d\tau = \frac{d}{dt}\int_\tau U^* k d\tau,$$

$$L^* = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_\tau \mathbf{V} \times \mathbf{F}^* k d\tau = W^*_1 - W^*_0,$$

posto

$$\text{(3)} \qquad W^* = \int_\tau U^* \, k d\tau .$$

§ 128. — Sia $\mathbf{F}^*$ costante rispetto a P e a t, nel qual caso si ha intanto

$$\mathbf{R}^* = \int_\tau \mathbf{F}^* \, k d\tau = m \, \mathbf{F}^* .$$

Assumendo l'asse delle z orientato come $\mathbf{F}^*$, e indicando con F^* e R^* le grandezze di $\mathbf{F}^*$ e di $\mathbf{R}^*$, si ha poi

$$X^* = 0 , \qquad Y^* = 0 , \qquad Z^* = F^* .$$

Quindi, per (2),

$$U^* = F^* z ;$$

e, conformemente a (3),

$$\text{(4)} \qquad W^* = F^* \int_\tau kz \, dm = F^* m \bar{z} = R^* \bar{z} ,$$

dinotando $\bar{z}$ la z del centro di massa.

Questo è il caso delle forze motrici di gravità, nel quale R^* rappresenta la grandezza P del peso del corpo, e $\bar{z}$ la quota del centro di massa, contata dall'alto in basso.

§ 129. — Sia ancora $\mathbf{F}^*$ l'accelerazione centrifuga del punto P, nel suo movimento relativo ad una terna d'assi in movimento rotatorio uniforme, con velocità angolare di grandezza ω (cfr. § 55): ossia il sistema delle $\mathbf{F}^* k d\tau$ sia quello delle forze motrici centrifughe, applicate ai punti del mobile, in tale movimento relativo del mobile medesimo. Allora, assumendo l'asse delle z colla direzione dell'asse di rotazione, si ha

$$X^* = \omega^2 x , \qquad Y^* = \omega^2 y , \qquad Z^* = 0 .$$

Quindi, per (2),

$$U^* = \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}\omega^2\rho^2,$$

e, conformemente a (3),

$$(5) \qquad W^* = \frac{1}{2}\omega^2 K, \qquad K = \int_\tau \rho^2 k d\tau .$$

K rappresenta il momento d'inerzia del mobile, al considerato istante, rispetto alla retta che funge da asse di rotazione degli assi mobili (cfr. § 99).

§ 130. — Un sistema di forze motrici composto di due altri (cfr. § 102, 3)), che ammettono potenziale, ammetterà esso stesso potenziale, rappresentato dalla somma dei potenziali dei due sistemi (cfr. § 104, 3)).

Quindi, pel sistema delle forze motrici composto delle forze motrici di gravità e delle forze motrici centrifughe corrispondenti al movimento rotatorio uniforme di una terna d'assi, si ha

$$(6) \qquad W^* = P\bar{z} + \frac{1}{2}\omega^2 K:$$

formola, che serve per l'applicazione del teorema della forza viva al moto apparente dei gravi in seconda approssimazione (cfr. § 59 e § 110).

§ 131. — Il sistema delle $\mathbf{F}^* k d\tau$ sia di forze motrici interne (cfr. § 68), e sia

$$mm'\Phi^*$$

la forza motrice elementare, corrispondente alla supposta condizione fisica, applicata al punto materiale definito dal posto P e

dalla massa m. Abbiamo allora (§ 70)

$$\mathbf{F}^* = \int_{\tau'} \mathbf{\Phi}^* k' d\tau',$$

dove τ', luogo del punto P', indica, come τ, luogo di P, il campo rappresentato dal mobile al supposto istante.

Quindi

$$\mathcal{P}^* = \int_\tau k d\tau \, \mathbf{V} \times \mathbf{F}^* = \int_\tau k d\tau \int_{\tau'} k' d\tau' \, \mathbf{V} \times \mathbf{\Phi}^*,$$

e, scambiando le parti di P e di P' (cfr. § 72),

$$\mathcal{P}^* = -\int_{\tau'} k' d\tau' \int_\tau k d\tau \, \mathbf{V}' \times \mathbf{\Phi}^* = -\int_\tau k d\tau \int_{\tau'} k' d\tau' \, \mathbf{V}' \times \mathbf{\Phi}^*,$$

per cui

(7)
$$\mathcal{P}^* = \frac{1}{2} \int_\tau k d\tau \int_{\tau'} k' d\tau' (\mathbf{V} - \mathbf{V}') \times \mathbf{\Phi}^*.$$

Introduciamo ora l'ipotesi (§ 71) che la direzione di $\mathbf{\Phi}^*$ sia quella della retta dei punti P e P'. Allora, siccome la componente secondo la stessa retta, volta da P' verso P, di

$$\mathbf{V} - \mathbf{V}' = \frac{d(\mathrm{P} - \mathrm{P}')}{dt}$$

è

$$\frac{dr}{dt},$$

r indicando la grandezza di P − P', cioè la grandezza della distanza dei due punti, si ha

$$(\mathbf{V} - \mathbf{V}') \times \mathbf{\Phi}^* = \pm \Phi^* \frac{dr}{dt},$$

dove Φ^* dinota la grandezza di $\mathbf{\Phi}^*$, e va preso + o −, secondo che

il senso di Φ^* va da P' verso P o viceversa (secondo che la forza elementare è "repulsiva" o "attrattiva").

Si ottiene così intanto la formola, relativa alla suddetta ipotesi,

$$(7)' \qquad \mathcal{P}^* = \pm \frac{1}{2}\int_\tau k d\tau \int_{\tau'} k' d\tau' \, \Phi^* \frac{dr}{dt}.$$

Notiamo come da essa scaturisca che, se l'atto di movimento è rigido, con che sarà $\frac{dr}{dt} = 0$, per ogni coppia di punti, la potenza corrispondente sarà nulla (cfr. § 107).

Introduciamo anche l'ipotesi che Φ^* sia funzione della sola r. In tal caso, la forza motrice elementare si dice "centrale", e le forze motrici $\mathbf{F}^* k d\tau$, ad essa corrispondenti, si chiamano parimente "centrali". Poniamo allora

$$\Phi^* = \pm \frac{d\Psi^*}{dr}:$$

dove Ψ^* rappresenterà una nuova funzione di r, e del doppio segno va disposto come precedentemente.

Sarà

$$\pm \Phi^* \frac{dr}{dt} = \frac{d\Psi^*}{dt}.$$

Quindi

$$\mathcal{P}^* = \frac{1}{2}\int_\tau k d\tau \int_{\tau'} k' d\tau' \frac{d\Psi^*}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_\tau k d\tau \int_{\tau'} k' d\tau' \, \Psi^*,$$

e finalmente

$$\mathrm{L}^* = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{P}^* dt = \mathrm{W}_1^* - \mathrm{W}_0^*, \qquad \mathrm{W}^* = \frac{1}{2}\int_\tau k d\tau \int_{\tau'} k' d\tau' \, \Psi^*.$$

Si conclude che, chiamando, in generale, "forza motrice elementare centrale" la forza motrice elementare

$$(8) \qquad m m' \Phi^*$$

quando Φ^* ha la direzione della retta dei relativi punti P e P', e dipende puramente dalla loro mutua distanza, r: e chiamando inoltre "forze motrici centrali" le forze motrici $F^* k d\tau$, applicate ai punti di un corpo naturale, quando F^* corrisponde ad una forza motrice elementare centrale: un sistema di forze motrici interne centrali, corrispondenti a (8), ammette potenziale, W^*, dato da

$$
(9) \quad \begin{cases} W^* = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_\tau k d\tau \int_{\tau'} k' \, d\tau' \, \Psi^* \\ \text{dove} \\ \Psi^* = \pm \displaystyle\int \Phi^* \, dr . \end{cases}
$$

e va preso + o — secondo che la forza elementare è repulsiva o attrattiva.

Osservazione. La costante additiva arbitraria, introdotta dall'integrazione, rientra nella costante arbitraria additiva implicita in W^*.

Teorema della conservazione della forza viva.
(1.ª forma del teorema della conservazione dell'energia).

§ 132. — Supponiamo che il sistema totale delle forze motrici, applicate ai punti di un corpo naturale, ammetta potenziale, W. Allora, per un intervallo di tempo qualsivoglia $(t_0 \, t_1)$, in conseguenza del teorema della forza viva (§ 105), si verificherà l'equazione

$$T_1 - T_0 = W_1 - W_0 :$$

ossia, indicando con T e W i valori della forza viva, per un istante qualunque, e del potenziale, per la posizione del mobile appartenente a codesto istante,

$$(1) \qquad T - W = \text{Cost. risp. al tempo.}$$

Si ha quindi il

Teorema. Quando il sistema totale delle forze motrici, applicate ai punti di un corpo naturale, ammette potenziale, la differenza fra il valore della forza viva, ad un istante, e il valore del potenziale per la posizione del mobile, allo stesso istante, è invariabile col tempo.

Questo è il teorema della conservazione della forza viva.

§ 133. — *Corollario.* Quando il sistema totale delle forze motrici ammette potenziale (compresavi, se occorre, l'ipotesi che il lavoro di una parte di esso sia costantemente nullo), la forza viva riprende lo stesso valore, e il lavoro delle forze totali riesce nullo, nel corso del movimento del mobile, quando il potenziale riprende lo stesso valore, e, quindi, in particolare, quando il mobile riprende una stessa posizione, qualunque sia, del resto, la forma del movimento.

§ 134. — *Osservazione.* Un sistema di forze, il cui lavoro è costantemente nullo, conta per un corrispondente potenziale costante [1]).

La forza viva considerata come energia (attuale).

§ 135. — Col concetto che il lavoro negativo rappresenta lavoro raccolto dal movimento del mobile, a spese della corrispondente diminuzione di forza viva (§ 118), si collega immediatamente quello

---

[1]) La presente forma del teorema (a parte il termine « potenziale ») appartiene in sostanza a Lagrange *(Méc. Anal.* Partie II, Sec. III). Il quale lo applica ai corpi vincolati, deducendolo dalla sua formola generale (che implica il lavoro nullo delle forze vincolari), e ne conclude che la forza viva risulta « la même pour des corps libres et pour des corps liés ensemble d'une manière quelconque, pourvu que la liaison ne varie point avec le temps ». Con questo, Lagrange precisava i termini e le condizioni di un principio già penetrato nella Meccanica, col nome di « Conservatio Virium Vivarum ». Per la precedente storia, cfr. LAGRANGE, *Op. cit.* Partie II, Sec. I.

Il nostro « potenziale » è da altri chiamato « funzione delle forze »; preso col segno contrario, è la « Summe der Spannkräfte » di Helmoltz, e l'« Ergal » di Clausius.

che la forza viva di un mobile, ad ogni istante, rappresenta, alla sua volta, una capacità di fornir lavoro, o " energia „ del mobile.

Così, sia T la forza viva di un mobile al tempo qualunque t, e immaginiamo, — concependo, se occorre, mutato il sistema delle forze motrici, applicate ai punti del mobile — un movimento dello stesso mobile, che comincia con quell'istante, e con quel valore della forza viva, e finisce con un altro istante, pel quale la forza viva è nulla. In base a

$$-T = L$$

(§ 115), raccoglieremo da codesto movimento del corpo un lavoro, la cui grandezza assoluta è T. Dunque T misura il lavoro, che si può raccogliere da un movimento del mobile, o, alla spiccia, dallo stesso mobile, coll'estinzione, o col consumo, della forza viva medesima. E perciò chiameremo, quando ci piace, la forza viva " energia „ del mobile, al considerato istante, o, più precisamente, per una ragione che vedremo subito, " energia attuale „ [1]).

Teorema della conservazione dell'energia. Energia potenziale.

§ 136. — Inteso che il sistema totale delle forze motrici, applicate ai punti di un mobile, ammetta potenziale W, introduciamo la nuova quantità Π colla posizione

$$\Pi = W_M - W\,, \tag{1}$$

dove W_M indica il massimo valore di cui è suscettibile W, a seconda del caso, o nel movimento considerato, o subordinatamente alle circostanze imposte al movimento. Sarà, sotto gli stessi aspetti,

$$\Pi \geqq 0\,. \tag{2}$$

Grazie a (1), la (1) del § 132 acquista la nuova forma

$$T + \Pi = \text{Cost. risp. al tempo.} \tag{3}$$

---

[1]) Il significato della forza viva come *facultas agendi* appartiene già, per felice intuizione, ai primordii della Scienza Meccanica.

Riescono così le variazioni di Π complementari di quelle di T; e, per (2), il valore di Π, ad ogni istante, rappresenta il massimo incremento di cui è suscettibile l'energia attuale del mobile, cominciando dal suo valore al considerato istante, o nel corso del movimento, o surbordinatamente alle condizioni imposte al movimento. Vale a dire, Π rappresenta, ad ogni istante, il soprappiù di energia attuale, di cui, allo stesso istante, è capace il mobile; e perciò si chiama la “ energia potenziale „ del mobile, all'istante in discorso.

Se ne conclude il

Teorema. Quando il sistema totale delle forze motrici, applicate ai punti di un corpo naturale, ammette potenziale, sono fra loro complementari le variazioni della energia attuale e quelle di una quantità, detta energia potenziale dello stesso corpo (eguale alla differenza fra il massimo valore di cui è suscettibile il potenziale e il suo valore presente), funzione della posizione del corpo, suscettibile di valori positivi e del valore zero. La quantità invariabile col tempo, rappresentata dalla somma dell'energia potenziale e dell'energia attuale, si chiama la “ energia totale „ del corpo.

Questo è il teorema della conservazione dell'energia.

Applicazione al movimento dei gravi liberi.

§ 137. — Distinguiamo cogli indici *g* e *i* gli elementi relativi alle forze motrici di gravità e alle forze motrici interne: e indichiamo con D l'incremento corrispondente al passaggio dall'origine al termine di un intervallo di tempo qualsivoglia.

Avremo, in primo luogo (§ 105, § 104, 3)),

$$DT = L_g + L_i. \tag{1}$$

D' altra parte, abbiamo, pel § 128,

$$L_g = mg\,D\bar{z}, \tag{2}$$

$\bar{z}$ indicando la quota verticale del centro di massa, contata da un livello qualunque, dall'alto in basso; pel § 111 (Teorema di König), intendendo che T_R indica la forza viva del movimento riferito al centro di massa,

$$T = \frac{m\bar{V}^2}{2} + T_R; \tag{3}$$

infine, in conseguenza di

$$\bar{A} = \frac{d\bar{V}}{dt} = g$$

(cfr. § 103),

$$\frac{d\frac{1}{2}\bar{V}^2}{dt} = g \times \bar{V} = g\frac{d\bar{z}}{dt},$$

donde

$$D\frac{1}{2}\bar{V}^2 = g\,D\bar{z}. \tag{4}$$

Ora, per (1), (2), (3), si ha, in primo luogo,

$$D\frac{m\bar{V}^2}{2} + DT_R = mg\,D\bar{z} + L_i.$$

E, per (4), questa equazione si scinde nelle due

$$D\frac{m\bar{V}^2}{2} = mgD\bar{z}, \tag{5}$$ $$DT_R = L_i. \tag{6}$$

Per (5), il movimento del punto materiale definito dal centro di massa e dalla massa del corpo, soddisfa il teorema della conservazione della forza viva, col potenziale $mg\bar{z}$, appartenente al sistema delle forze motrici di gravità (§ 132).

Poniamo poi

$$\Pi_g = mg(\bar{z}_M - \bar{z}),$$

indicando con $\bar{z}_M$ la quota verticale, contata nel modo indicato, del più basso livello conseguibile dal centro di massa del corpo. La (5) potrà porsi allora sotto la forma

$$\frac{m\bar{V}^2}{2} + \Pi_g = \text{Cost. risp. al tempo}\,. \tag{7}$$

La qual equazione esprime che il movimento dello stesso punto materiale soddisfa il teorema della conservazione dell'energia, colla energia potenziale Π_g, data dal prodotto delle grandezze del peso del corpo e della quota presente del centro di massa sul più basso livello da esso conseguibile (§ 136).

La (6), quando il movimento del grave sia rigido, fornisce (§ 108), alla sua volta,

$$DT_R = 0 \qquad T_R = \text{Cost. risp. al tempo}\,.$$

Teorema della conservazione dell'energia generalizzato.

§ 138. — Si supponga il sistema totale delle forze motrici, applicate ai punti del mobile, composto di due sistemi, di cui distingueremo gli elementi coi numeri 1 e 2, e il primo ammetta potenziale $W^{(1)}$.

Avremo, in primo luogo (§ 105, § 104, 3), § 125),

$$DT = DW^{(1)} + L^{(2)},$$

donde, posto, conformemente a (1) del § 136,

$$\Pi^{(1)} = W^{(1)}_M - W^{(1)}, \tag{1}$$

per chiamare $\Pi^{(1)}$ la energia potenziale appartenente al sistema 1, ricaviamo

$$D(T + \Pi^{(1)}) = L^{(2)}. \tag{2}$$

Questa equazione, che si riduce alla (3) del § 136, nell'ipotesi che il sistema 2 si annulli, traduce, nei termini più generali, il così detto teorema della conservazione dell'energia generalizzato.

§ 139. — Essa acquista un particolare significato, nell'ipotesi che 1 e 2 rappresentino, rispettivamente, il sistema delle forze motrici interne ed esterne. Allora, distinguendo gli elementi relativi ai due sistemi cogli indici i ed e, Π_i rappresenta l'energia potenziale appartenente al sistema delle forze motrici interne. Posto poi

$$T + \Pi_i = E_i,$$

E_i si chiama la " energia intrinseca „ del corpo naturale considerato. E l'equazione diventa

$$DE_i = L_e. \tag{3}$$

Confronto coll'esperienza dell'ipotesi del potenziale e del teorema della conservazione dell'energia.

§ 140. — L'esistenza del potenziale, che forma il fondamento del teorema della conservazione dell'energia (§§ 136, 138), è direttamente verificata dall'esperienza in molteplici casi. In altri casi, essa apparisce giustificata *a posteriori* dai risultati.

§ 141. — *Problema del " perpetuum mobile „*. Il problema tecnico del " perpetuum mobile „ o del " movimento perpetuo „, giudicando dalle circostanze concrete, adoperate negli innumerevoli tentativi per giungere a codesta invenzione, può essere particolarmente posto in questi termini. Trovare una macchina, dove il sistema delle potenze motrici è formato dalle forze motrici di gravità e da forze motrici interne, tale che, al compiersi di ogni periodo, per cui gli organi della macchina riprendono una stessa

posizione (relativa al globo terrestre), la forza viva possieda almeno lo stesso valore come al principio del periodo.

È chiaro che, in caso contrario, diminuendo, al compiersi di ogni periodo, la grandezza della forza viva, codesta, col procedere del tempo, tenderà a zero, e la macchina finirà per fermarsi (§ 101, 2)).

Al suddetto scopo, è necessario che si verifichi, per ogni periodo, l'equazione (§ 122)

$$\mathrm{DT} + \mathrm{L}_u + \mathrm{L}_p = \mathrm{L}_m \,, \tag{1}$$

dove

$$\mathrm{DT} \geqq 0 \,, \qquad \mathrm{L}_u \geqq 0 \,, \tag{2}$$

e L_m rappresenta il lavoro, corrispondente al periodo, del sistema delle forze motrici interne, contribuenti al sistema delle potenze motrici; perchè, esistendo il potenziale delle forze motrici di gravità (pur calcolate in seconda approssimazione (§ 130)), il lavoro di queste forze motrici, per ogni periodo, riesce nullo.

Ne viene che, se supponiamo che anche le forze motrici interne ammettano potenziale, sarà, pel periodo,

$$\mathrm{L}_m = 0 :$$

e (1) fornisce la condizione, necessaria per l'indicato scopo,

$$\mathrm{L}_p = 0 \,.$$

Ora, alla stregua dell'esperienza, è sempre

$$\mathrm{L}_p > 0 \,; \tag{3}$$

e, d'altra parte, per l'invariabile insuccesso di così numerosi e svariati tentativi, la macchina in discorso è da reputarsi impossibile.

Dunque, in base al notorio risultato sperimentale (3), l'ipotesi che ai sistemi di forze motrici interne competa potenziale rende

ragione di quell'altro risultato sperimentale che è la presumibile impossibilità del ***perpetuum mobile***, ossia del movimento perpetuo.

Osservazione. Se si ammette *a priori* che una forza motrice elementare non possa essere altrimenti che centrale, allora esiste il potenziale d'ogni sistema di forze motrici interne (§ 131), e, col precedente ragionamento, in base a (3), si consegue una dimostrazione della impossibilità del *perpetuum mobile.*

§ 142. — *L'equazione* $DE_i = L_e$ (§ 139) si verifica, per esempio, nel movimento dei corpi del sistema solare, considerati come punti materiali, definiti dal loro centro e dalla loro massa, quanto basta per gran parte delle questioni di Meccanica Celeste. Ma è facile trovare qualche caso contrario.

Così, due cilindri metallici siano tenuti fortemente aderenti per due basi affacciate, in modo che i loro assi si trovino sopra una stessa retta, e intanto si facciano girare intorno a codesta retta, in senso contrario, coll'applicare a ciascuno un opportuno sistema di forze motrici esterne. Concorreranno a determinare il movimento le forze motrici interne, sostanzialmente rappresentate dalle pressioni di interno attrito radente. Il movimento rotatorio dei due cilindri diventerà, dopo un certo tempo, sensibilmente uniforme: e allora, per ogni intervallo di tempo, l'incremento della forza viva sarà nullo, e si verificherà l'equazione

$$L_i = L_e :$$

L_i, L_e indicando le grandezze assolute dei lavori delle forze motrici interne ed esterne, rispettivamente.

Ora L_i non è suscettibile, in questo caso, di essere rappresentato con DE_i, col precedente significato di E_i (§ 139). Perchè, essendo $DT = 0$, non potrebbe essere che $L_i = D\Pi_i$. E questo è impossibile, perchè L_i cresce continuamente, col progredire del

tempo, mentre DH_i dovrebbe annullarsi al compimento d'ogni giro, per cui il mobile, composto dei due cilindri, riprende la primitiva posizione.

§ 143. — D'altra parte, l'esperienza insegna che i due cilindri si riscaldano progressivamente, e che, se si misura la quantità di calore, Q, che si sviluppa in connessione col movimento dei due cilindri, per un intervallo di tempo qualsivoglia, esso si trova proporzionale al corrispondente lavoro L_e delle forze esterne. Per modo che, disponendo opportunamente del fattore di proporzionalità, regge l'eguaglianza

$$Q = L_e .$$

E allora, se quel calore si suppone la manifestazione della forza viva di un movimento di particelle del mobile, così piccole da sfuggire separatamente all'osservazione diretta, si potrà intendere ristabilita l'equazione

$$DE_i = L_e :$$

però con un nuovo significato di E_i (quello della suddetta forza viva molecolare) il quale eccede i limiti delle circostanze concrete, implicite nei fondamenti della Dinamica pura.

§ 144. — *Principio dell'equivalenza del calore e del lavoro — Prima legge fondamentale della Termodinamica.* Molteplici esperienze, tra cui classiche quelle di Joule, hanno dimostrato che l'eguaglianza

$$Q = L_e$$

regge ogniqualvolta il lavoro L_e delle forze motrici esterne non è accompagnato da variazione di forza viva (propriamente detta o dinamica) col rapporto di una piccola caloria per $419 . 10^5$ erg, pari al rapporto di una grande caloria per 427 chilogrammetri.

Nella stessa equazione, inteso L_e misurato in erg o in chilogrammetri, è poi inteso che sia assunta per unità di calore, rispettivamente, $1/419 . 10^5$ di piccola caloria, o $1/427$ di grande caloria. In tali modi il calore si dice misurato in misura assoluta, e, col primo, nel sistema (C. G. S).

In ciò consiste il così detto "principio della equivalenza del calore e del lavoro „. Il suddetto rapporto si chiama l' "equivalente meccanico del calore „, riferito alle unità indicate a seconda del caso.

La Termodinamica, dottrina della relazione fra il lavoro dinamico e il calore, assume poi come propria legge fondamentale (1.ª legge) la relazione

$$DT + D\Pi_i + Q = L_e ,$$

dove, Π_i, "energia potenziale intrinseca „ del corpo considerato, è supposta definita, in generale, col concorso di circostanze estranee alla Dinamica pura.

Si vede così come questa relazione proceda dal teorema della conservazione dell'energia, originariamente introdotto col semplice significato della Dinamica pura (§ 136). Ci limitiamo, su tale argomento, a codesti cenni, che valgono a dimostrare l'importanza di quel teorema.

Ripresa delle applicazioni all'equilibrio (§ 74).

§ 145. — Assegnate condizioni fisiche e assegnati corpi in presenza del corpo considerato, si possono chiamare circostanze determinatrici del suo movimento di una data specie, e le forze motrici, applicate ai punti del mobile, ad esse corrispondenti, variabili colla posizione degli stessi punti, o posizione del mobile, forze motrici pure di una " data specie „, suscettibili, a seconda di dette posizioni, di *valori* diversi.

Ciò premesso, le equazioni cardinali dell'equilibrio (§ 74), per ogni specie di forze motrici applicate ai punti del corpo considerato, rappresentano una limitazione dei loro valori, compatibili coll'equilibrio del corpo. E di qua dobbiamo presumere, in quanto i valori speciali delle forze motrici di una data specie dipendono dalla posizione del corpo, che l'equilibrio, per una specie di forze motrici, non potrà verificarsi che in certe posizioni.

Ogni posizione, in cui un corpo, ai cui punti è applicato un sistema totale di forze motrici di una data specie, può mantenersi in equilibrio, si chiama una " posizione d'equilibrio „ del corpo, relativa alla indicata specie di forze motrici.

§ 146. — " Mutua distanza „ di due posizioni di un corpo chiamiamo il segmento scalare, la cui grandezza Δ è rappresentata da

$$\Delta = \sqrt{\frac{\int_\tau \Delta_P^2 k d\tau}{m}},$$

dove Δ_P indica la grandezza della mutua distanza delle due corrispondenti posizioni dello stesso punto generico P del corpo, e gli altri simboli conservano il consueto significato.

Si vede che condizione necessaria e sufficiente perchè sia

$$\Delta = 0$$

è che sia

$$\Delta_P = 0,$$

qualunque sia il punto P, vale a dire che le due posizioni coincidano (in quanto coincidono tutti i punti).

§ 147. — Sia ai punti di un corpo applicato un sistema totale di forze motrici di una certa specie, atto a determinare il movimento del corpo, in un intervallo di tempo qualunque, col con-

corso della posizione e dell'atto di movimento, ad un istante. E sia una posizione del corpo tale che, indicando con Δ', Δ_0 e Δ (§ 146) le distanze di altre posizioni dello stesso corpo da essa, fissato Δ', piccolo a piacere, purchè la posizione e la forza viva, ad un istante determinato, verifichino le disuguaglianze

$$\Delta_0 < \delta, \qquad T_0 < \varepsilon, \tag{1}$$

con δ e ε sufficientemente piccoli, si abbia, per ogni posizione assumibile dal mobile, nel corso del suo movimento,

$$\Delta < \Delta'. \tag{2}$$

Allora si vede agevolmente che detta posizione sarà una posizione d'equilibrio. Perchè, supposto che il corpo vi si trovi, ad un istante, con forza viva nulla, la manterrà perpetuamente.

Difatti, supponiamo, se è possibile, che, ad un altro istante, la distanza della posizione del corpo da quella posizione sia

$$\Delta'' > 0.$$

Assumiamo allora

$$\Delta' < \Delta''. \tag{3}$$

La nostra ipotesi richiede che, subordinatamente alle (1), si verifichi (2). Ora, pel primo istante, le (1) sono certamente verificate, perchè è, in tal caso,

$$\Delta_0 = 0, \qquad T_0 = 0:$$

e tuttavia (2) riesce esclusa da (3). Vale a dire $\Delta'' > 0$ non è conciliabile con detta ipotesi, e non si può altrimenti supporre che $\Delta'' = 0$, c. v. d. (cfr. § 146).

§ 148. — Una posizione, per cui si verifica la suddetta ipotesi, si chiama " posizione d'equilibrio stabile " relativa alla conside-

rata specie di forze motrici. Diversamente, una posizione d'equilibrio si dice di " equilibrio instabile ".

Osservazione. Le sole posizioni di equilibrio stabile sono utili per la pratica. Perchè, esclusivamente in tal caso, per le circostanze inevitabili di un piccolo errore nell'assegnamento della posizione, o di una piccola velocità dei punti del corpo, questo, pur movendosi, non si scosterà, dalla posizione d'equilibrio, oltre limiti tanto più ristretti quanto più piccole sono tali quantità.

§ 149. — *Teorema di Dirichlet.* Una posizione di un mobile, a cui compete un valor massimo effettivo [1]) del potenziale del sistema totale delle forze motrici, applicate ai punti del mobile, è una posizione d'equilibrio stabile.

Poniamo, ciò ch'è sempre lecito (cfr. § 125), eguale a 0 il supposto valor massimo del potenziale, W. Sarà

$$W<0,$$

sotto la condizione

$$0<\Delta<a,$$

indicando con Δ la distanza della posizione a cui compete il valor W dalla posizione indicata, per cui è $W=0$.

Sia

$$\Delta'<a:$$

e indichiamo con W' il valore di W nella posizione generica, per cui è

$$\Delta=\Delta', \tag{1}$$

e con W'_M il maggior valore di W', che noi supponiamo esistente

---

[1]) Diciamo che una funzione riceve un « massimo effettivo » in un posto, quando, in ogni altro posto di un intorno abbastanza piccolo di esso, riceve un valore *minore*.

e finito, equiparando, in ogni caso da noi contemplato, W ad una funzione continua e finita di un certo numero di variabili (cfr. § 124).

Sarà

$$W'_M < 0 , \tag{2}$$

$$W' - W'_M \leq 0 . \tag{3}$$

Indichiamo ora con W_0 e T_0 i valori del potenziale e della forza viva, per la posizione e per l'atto di movimento, ad un istante determinato, e con W e T i valori delle stesse variabili, per la posizione e l'atto di movimento, ad un istante qualsivoglia. Sarà (§ 132)

$$T - W = T_0 - W_0 , \qquad T = W + T_0 - W_0 .$$

Poniamo

$$-W_0 < -\frac{W'_M}{2} , \qquad T_0 < -\frac{W'_M}{2} , \tag{4}$$

che valgono le (1) del § 147. Ne segue

$$T < W - W'_M ,$$

donde

$$W - W'_M > 0 .$$

Confrontando la qual disuguaglianza con (3), che sta quando si verifica (1), e notando che, per

$$\Delta = 0 ,$$

si ha, per (2),

$$W - W'_M = - W'_M > 0 ,$$

si conclude che, per tutte le posizioni appartenenti al movimento determinato dalla supposta specie di forze, colle condizioni (4), si manterrà

$$\Delta < \Delta' ,$$

c. v. d.

Osservazione. Si riconosce subito direttamente che la posizione in discorso sarà posizione d'equilibrio, conformemente alle conclusioni del § 147. Difatti, supposto, ad un certo istante, il mobile in quella posizione, con forza viva nulla, si avrà, per ogni altro istante,

$$T = W. \tag{5}$$

Ora, finchè resta

$$\Delta < a,$$

sarà

$$W = 0 \quad \text{per} \quad \Delta = 0,$$

e

$$W < 0 \quad \text{per} \quad \Delta > 0.$$

Ma la seconda ipotesi è inammissibile, perchè ne viene, per (5),

$$T < 0.$$

E non resta quindi che la prima, colla quale il mobile serba perpetuamente l'indicata posizione.

§ 150. — Il lavoro elementare di un sistema di forze motrici (§ 112), corrispondente ad uno spostamento rigido, definito da

$$\delta s_P = \delta s_O + \delta\varphi \wedge (P - O),$$

dove δs_P e δs_O, indicano gli spostamenti del punto generico P e del punto speciale O, e $\delta\varphi$ la rotazione propria dello spostamento, riesce espresso (§ 106) da

$$\delta L = \mathbf{R} \times \delta s_O + \mathbf{M}_O \times \delta\varphi,$$

dove $\mathbf{R}$ e $\mathbf{M}_O$ rappresentano il risultante e il momento rispettto ad O del considerato sistema di forze motrici. Quindi, se s'immagina tale spostamento elementare, per una posizione d'equilibrio relativa ad una certa specie di forze motrici (§ 145), e s'intende che $\mathbf{R}$ e $\mathbf{M}_O$

rappresentino il risultante e il momento rispetto ad O del sistema totale delle forze motrici medesime, coi valori corrispondenti all'ipotesi dell'equilibrio nella posizione in discorso, si ha

$$\delta L = 0 . \tag{6}$$

Difatti, questa equazione è soddisfatta senz'altro dal sistema delle forze interne (§ 107): ed è anche soddisfatta dal sistema delle forze esterne, in conseguenza delle equazioni cardinali (§ 74); quindi è soddisfatta dal sistema composto dei due.

Reciprocamente, l'equazione (6), *scritta per uno spostamento elementare rigido qualsivoglia,* vale a dire *per* δs_0 *e* $\delta\varphi$ *arbitrarii,* fornisce

$$\mathbf{R} = 0 , \qquad \mathbf{M}_0 = 0 ;$$

ed essendo queste equazioni senz'altro soddisfatte dal sistema delle forze interne (§§ 66, 67), ne seguono le equazioni analoghe del sistema delle forze esterne, cioè le equazioni cardinali dell'equilibrio.

Se ne conclude che, in tale ipotesi, (6) equivale alle equazioni cardinali dell'equilibrio: e perciò serve egualmente a sceverare le posizioni d'equilibrio relative alla considerata specie di forze motrici (cfr. § 145).

Lo spostamento elementare in discorso, e il relativo atto di movimento, in quanto non s'intendono appartenere ad un movimento del corpo, determinato dalle supposte forze motrici, e condizioni iniziali, ma hanno il significato di una pura ipotesi " fittizia, si chiamano virtuali ".

§ 151. — Supponiamo ora che il sistema totale delle forze motrici, applicate ai punti del mobile, ammetta potenziale W. Sarà (§ 125)

$$\delta L = \delta W ,$$

δW indicando l'aumento infinitesimale di W, relativo al passaggio

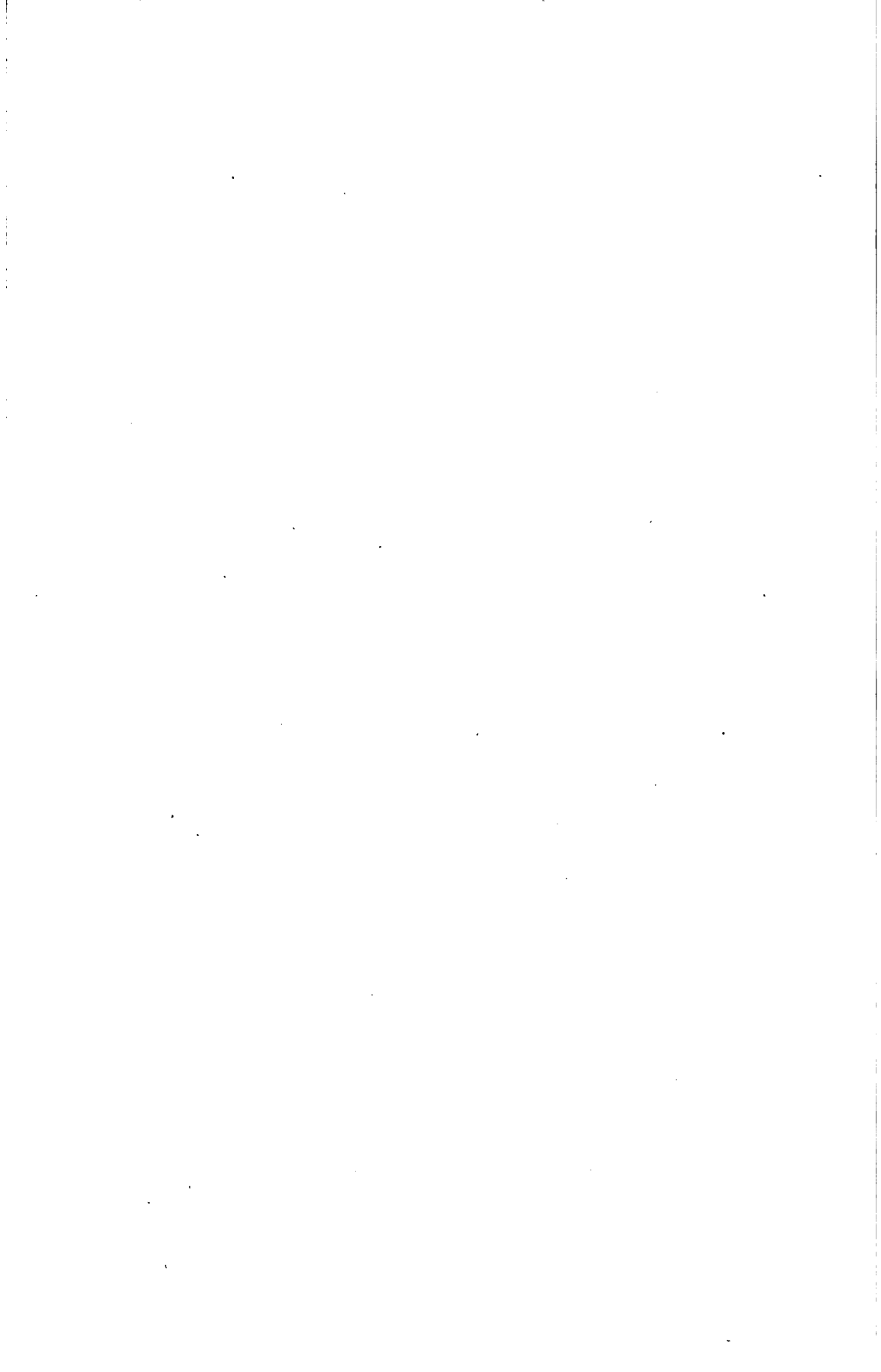
dalla posizione iniziale alla posizione finale dello spostamento elementare rigido, a cui corrisponde δL. Quindi le posizioni d'equilibrio riescono sceverate dalla equazione

$$\delta W = 0 . \tag{7}$$

Ora, perchè questa equazione sia soddisfatta, è sufficiente che W, per la considerata posizione, riceva un valore massimo o minimo. E perciò tutte (ma, per avventura, non sole) codeste posizioni possono essere posizioni d'equilibrio.

Abbiamo veduto, con un altro ordine di considerazioni, che una posizione, per cui W riesce un massimo effettivo, è necessariamente posizione d'equilibrio, e, inoltre, d'equilibrio stabile (§ 149). La discussione dei rimanenti casi è altrimenti complicata, e non potrebbe trovar posto nei limiti di questa esposizione.

I risultati più cospicui, su questo argomento, furono ottenuti da Ljapunoff, il quale indicò ampie classi di casi, facilmente caratterizzabili, in cui una posizione, per cui il potenziale non riesce un valor massimo, è posizione d'equilibrio instabile [1].

[1] Sur l'instabilité de l'équilibre dans certains cas où la function des forces n'est pas un maximum *(Journal de Mathématiques,* 1897).

Capitolo Terzo

Calcolo del movimento per gravitazione

Leggi di Kepler.

§ 152. — Le osservazioni astronomiche forniscono, come risultato di notevole approssimazione, le seguenti leggi, nel cui enunciato i corpi celesti sono equiparati a punti, stando la piccolezza del loro raggio, in confronto delle loro mutue distanze.

1.ª legge. Il raggio vettore condotto dal sole a ogni pianeta descrive aree piane, proporzionali al tempo.

2.ª legge. Ogni pianeta descrive un ellisse, della quale il sole occupa un foco.

3.ª legge. I quadrati dei tempi, impiegati dai diversi pianeti a descrivere le relative ellissi, sono proporzionali ai cubi dei loro assi maggiori.

§ 153. — Le stesse leggi, dove al sole si surroghi un pianeta, e ai pianeti i satelliti del medesimo pianeta, valgono, sebbene con approssimazione alquanto minore, pel movimento dei satelliti riferito al relativo pianeta (§ 91).

Legge di Newton.

§ 154. — La prima legge afferma una proprietà caratteristica del movimento centrale, col sole per centro: e perciò ne segue

che l'accelerazione d'ogni pianeta, ad ogni istante, ha la direzione del raggio vettore condotto dal sole al pianeta, allo stesso istante. Del resto, si vede subito.

Assumiamo il sole per origine delle coordinate e il piano del movimento del considerato pianeta per piano xy. La prima legge riesce espressa da

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=\mathfrak{C} \tag{1}$$

dove $\mathfrak{C}$ rappresenta una costante. E di qua scaturisce, derivando rispetto a t,

$$x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=0, \qquad \frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{x}=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{y},$$

c. v. d.

Otteniamo così, in primo luogo,

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\pm A\frac{x}{r}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=\pm A\frac{y}{r}, \tag{2}$$

dove A rappresenta la grandezza dell'accelerazione del pianeta, ed r la sua distanza dal sole, al tempo t, ossia, nella sua posizione (x,y): e va preso il segno superiore o l'inferiore, secondo che il senso dell'accelerazione è quello del raggio vettore volto verso il pianeta, oppure volto verso il sole.

Per la seconda legge, attribuendo all'asse delle x la direzione dell'asse maggiore dell'ellisse, col senso volto verso il vertice più prossimo al foco, che funge da origine, e indicando con a ed e il semiasse maggiore e l'eccentricità dell'ellisse, abbiamo

$$r=a(1-e^2)-ex. \tag{3}$$

D'altra parte, è una formola generale del moto centrale [1])

$$(4) \qquad A = \pm\left(\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{\mathfrak{C}^2}{r^3}\right):$$

introducendo nella quale (3), e valendosi della prima delle (2), si ha subito

$$A = \mp \frac{\mathfrak{C}^2}{a(1-e^2)} \frac{1}{r^2},$$

dove il segno superiore e inferiore ha lo stesso significato come nelle (2). Siccome A è positivo, e, per l'ellisse, $1 - e^2 > 0$, va scelto il segno inferiore: con che

$$(5) \qquad A = \frac{\mathfrak{C}^2}{a(1-e^2)} \frac{1}{r^2}.$$

Si conclude che il senso dell'accelerazione di ogni pianeta, ad ogni istante, è quello del raggio vettore volto dal pianeta verso il sole, e la grandezza è inversamente proporzionale al quadrato della distanza del pianeta dal sole.

---

[1]) Da

$$r^2 = x^2 + y^2$$

si ricava

$$r\frac{dr}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt},$$

e combinando questa equazione colla (1), si ottiene

$$V^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{\mathfrak{C}^2}{r^2}, \qquad \frac{dV^2}{dt} = 2\left(\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{\mathfrak{C}^2}{r^3}\right)\frac{dr}{dt}.$$

Si deduce poi dalle (2) (equazione della forza viva)

$$\frac{dV^2}{dt} = \pm 2A\frac{dr}{dt}.$$

Identificando questa equazione colla precedente, si ritrova (4).

Per la prima e la seconda legge, insieme, indicando con $\mathfrak{T}$ il tempo impiegato dal pianeta a descrivere la propria ellisse, e con b l'asse minore, si ha

$$2\pi ab = 2\pi a^2 \sqrt{1-e^2} = \mathfrak{C}\mathfrak{T},$$

ossia

$$4\pi^2 a^4 (1-e^2) = \mathfrak{C}^2 \mathfrak{T}^2 .$$

E di qua

$$\frac{\mathfrak{C}^2}{a(1-e^2)} = 4\pi^2 \frac{a^3}{\mathfrak{T}^2} .$$

Per la terza legge, $\frac{a^3}{\mathfrak{T}^2}$ è costante pei diversi pianeti. Quindi, posto

$$4\pi^2 \frac{a^3}{\mathfrak{T}^2} = \mathrm{K}, \tag{6}$$

si ha da (5)

$$A = \frac{\mathrm{K}}{r^2}, \tag{7}$$

con K invariabile, così per le diverse posizioni d'uno stesso pianeta, come pei diversi pianeti.

E si conclude che la grandezza dell'accelerazione riesce inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal sole, sia confrontando le posizione di uno stesso pianeta, sia le posizioni di due diversi pianeti.

§ 155. — Simili conclusioni si deducono dal § 153 pel movimento dei satelliti di un pianeta, riferito allo stesso pianeta. L'accelerazione di un satellite risulta avere la direzione del raggio vettore, condotto dal pianeta al satellite, il senso di questo raggio vettore

che volge dal satellite verso il pianeta, e grandezza A', rappresentata da

$$A' = \frac{K'}{r^2},$$

dove, indicando con a' e $\mathfrak{T}'$ il semi-asse maggiore dell'ellisse descritta da un satellite qualunque del pianeta, e il tempo impiegato a descriverla, si ha

$$4\pi^2 \frac{a'^3}{\mathfrak{T}'^2} = K'. \tag{8}$$

§ 156. — Su queste conclusioni formuliamo la

Legge di Newton. L'accelerazione di un corpo celeste, concepito isolato con un altro, ha la direzione della retta dei due corpi, il senso di questa retta volto dal corpo considerato verso l'altro, e grandezza rappresentata da

$$\frac{K}{r^2},$$

dove r indica la grandezza della distanza dei due corpi, e K una costante, invariabile col primo corpo, caratteristica del secondo.

Deduzioni relative ai principii fondamentali della teoria, e confronto coi risultati dell'esperienza.

§ 157. — La legge precedente va considerata come un risultato sperimentale, attinente al caso che, in un intervallo di tempo, il movimento di un corpo possa essere sensibilmente inteso come determinato da un altro, senza apprezzabile influenza dei rimanenti (§ 32). Ammesso provvisoriamente questo concetto, verificheremo, fra un momento, come, in base ai principii della teoria,

e alle circostanze specifiche della stessa legge, esso risulti perfettamente plausibile.

Confrontandola colla legge dell'eguaglianza dell'azione e della reazione (§ 43, II, *a)*), a codesta riesce senz'altro conforme l'orientazione dell'accelerazione dei due corpi.

Distinguendo poi cogli indici 1 e 2 gli elementi relativi ai due corpi, la combinazione delle due leggi fornisce immediatamente, come risultato dell'eguaglianza delle grandezze delle due forze motrici,

$$m_1 K_2 = m_2 K_1 , \tag{1}$$

ossia

$$\frac{K_1}{m_1} = \frac{K_2}{m_2} = \varkappa^2 , \tag{2}$$

dove $\varkappa^2$ rappresenta una costante, indipendente da tutti i corpi.

Quindi, in conseguenza della combinazione suddetta, si conclude che la forza motrice di un corpo celeste, concepito isolato con un altro (intesi i corpi celesti equiparabili a punti materiali (§ 21)), ha la direzione della retta dei due corpi, il senso di questa retta volto dal corpo considerato verso l'altro, e grandezza rappresentata da

$$\varkappa^2 \frac{m_1 m_2}{r^2} ,$$

m_1, m_2 indicando le masse dei due corpi, r la loro mutua distanza, e $\varkappa^2$ una costante indipendente dai corpi: ossia da

$$- \varkappa^2 m_1 m_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial r} .$$

Ora, in generale, quando, per un vettore, funzione del posto P di un campo, esiste uno scalare, funzione dello stesso posto, φ, tale

che, immaginando la famiglia delle superficie

$$\varphi = \text{Cost.},$$

e indicando con n la normale nei punti di queste superficie, volta nel senso in cui φ cresce, il vettore ha, in ogni posto, la direzione e il senso di detta normale, e per grandezza

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n},$$

il vettore medesimo si chiama " gradiente „ dello scalare φ, e si indica con

$$\text{grad}\,\varphi.$$

Perciò, indicando la suddetta forza motrice con $\mathbf{R}^*$, possiamo scrivere brevemente

$$\mathbf{R}^* = \varkappa^2 m_1 m_2 \,\text{grad}\,\frac{1}{r}, \tag{3}$$

dove, nel formare il gradiente, va considerato come variabile il corpo a cui si riferisce $\mathbf{R}^*$, cioè l'altro come polo fisso del raggio r.

§ 158. — Introduciamo ora la legge del parallelogrammo delle forze (§ 43, III, *a)*). Per essa, e per (3), la forza motrice reale di un corpo celeste qualsivoglia sarà rappresentata da

$$\mathbf{R} = \varkappa^2 m \sum m' \,\text{grad}\,\frac{1}{r}, \tag{4}$$

dove, m indicando la massa del corpo in discorso, m' indica la massa di un altro corpo qualunque dell'universo, r la sua distanza dal primo, e il sommatorio abbraccia la totalità dei corpi diversi dal considerato.

Allora, tenendo conto che la luce giunge a noi dal sole in $8^m\, 13^s$, e invece in circa tre anni dalla più vicina stella fissa, po-

tremo, per ogni corpo del sistema solare, trascurare in (4) l'aggiunta dei termini corrispondenti alle stelle fisse, per la ragione che involgeranno valori del fattore $\frac{1}{r^2}$ estremamente piccoli, in confronto di quelli che appartengono ai corpi dello stesso sistema solare.

Il sistema solare diventa così equiparabile ad un mobile, il cui centro di massa o sarà immobile, o possiederà movimento rettilineo uniforme (§ 83).

Abbiamo veduto che, se i rapporti delle masse di tutti i corpi del sistema solare alla massa del sole si reputano così piccoli da potersene sensibilmente trascurare l'aggiunta all'unità, detto centro di massa si riduce, con pari approssimazione, al centro di massa del sole. Il qual risultato è da reputarsi conforme all'esperienza: perchè ne scaturisce, in primo luogo, l'ipotesi copernicana, che rende ragione, nel modo più semplice e naturale, di una moltitudine di fenomeni, e, in secondo luogo, il pure osservato movimento complessivo rettilineo uniforme del sistema solare negli spazii stellari (§ 88).

Ora, da (1) segue

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{K_2}{K_1} : \tag{5}$$

dove, se 1 s'intende corrispondere al sole, e 2 ad un pianeta, K_1 è noto per (6) del § 155, e K_2 noto, per la formola (8) dello stesso §, per ogni pianeta, che possieda almeno un satellite. E il calcolo effettivo dei suddetti rapporti, mediante questa proporzione, conferma pienamente la premessa ipotesi.

Applicando poi (4) ad un pianeta, e, per lo stesso motivo, trascurando, in prima approssimazione, l'aggiunta di tutti i rimanenti al termine competente al sole, si ottiene

$$\mathbf{R} = \varkappa^2 m m' \operatorname{grad} \frac{1}{r} . \tag{6}$$

Questa non è che la (3) del § 157, applicata all'ipotesi del pianeta, concepito isolato col sole. Così, rammentando la deduzione di quest'ultima formola dalle leggi di Kepler, si conclude che il movimento dei pianeti conforme a queste leggi si concilia coi principii fondamentali della teoria, in quanto si trascura l'influenza delle stelle fisse, per la loro immensa distanza, e quella dei rimanenti pianeti e dei satelliti, per la piccolezza della loro massa, in confronto della massa del sole.

Applicando ancora (4) ad un satellite, e serbando, nel secondo membro, anche il termine appartenente al relativo pianeta, a motivo del compenso, che si stabilisce fra la minore distanza di questo dal satellite, e la maggiore massa del sole, si ha

$$\mathbf{R} = \varkappa^2 m\left(m' \operatorname{grad}\frac{1}{r'} + m'' \operatorname{grad}\frac{1}{r''}\right),$$

m', m'' indicando le masse del sole e del pianeta, r', r'' le distanze del sole e del pianeta dal satellite.

Indicando poi con $\mathbf{R}_R$ la forza motrice del movimento del satellite riferito al pianeta, e con $\mathbf{A}_S$ l'accelerazione di trascinamento, cioè l'accelerazione del pianeta, si ha (§ 54)

$$\mathbf{R}_R = \varkappa^2 m\left(m' \operatorname{grad}\frac{1}{r'} + m'' \operatorname{grad}\frac{1}{r''}\right) - m\mathbf{A}_S. \tag{7}$$

Ma, conformemente a (6), è

$$\mathbf{A}_S = \varkappa^2 m' \operatorname{grad}\frac{1}{r},$$

r indicando la distanza del pianeta dal sole.

Quindi

$$\mathbf{R}_R = \varkappa^2 m\left[m'\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r'} - \operatorname{grad}\frac{1}{r}\right) + m'' \operatorname{grad}\frac{1}{r''}\right],$$

Ora, la mutua distanza tra pianeta e satellite è sempre assai piccola, in confronto della loro distanza dal sole: e si riconosce

subito che, se il rapporto della prima alla seconda si reputa trascurabile di fronte all'unità, diventa, con pari approssimazione, trascurabile l'aggiunta di

$$(8) \qquad m'\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r'}-\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)$$

nella precedente somma, almeno con una discreta approssimazione.

Con questo, (7) fornisce

$$(9) \qquad \mathbf{R}_{\mathtt{R}} = \varkappa^2 mm'' \operatorname{grad}\frac{1}{r''};$$

la quale è la (3) del § 157, applicata all'ipotesi di un satellite, isolato col relativo pianeta. E rammentando anche la deduzione di questa formola, nell'ipotesi stessa, dalle leggi di Kepler, estese al movimento dei satelliti riferito al relativo pianeta, si conclude che il movimento medesimo, conforme a codeste leggi, si concilia coi principii fondamentali della teoria, in quanto alle omissioni del caso precedente si aggiunga quella di (8), reputando trascurabile di fronte all'unità il rapporto della mutua distanza del pianeta e del satellite alla loro distanza dal sole.

§ 159. — In conclusione, il movimento conforme alle leggi di Kepler riesce in pieno accordo coi principii fondamentali della teoria, in quanto si considera come il risultato di una approssimazione, i cui limiti sono esattamente definiti.

S'intende così come osservazioni più precise rileveranno una deviazione dal movimento conforme alle leggi di Kepler, nel movimento dei satelliti riferito al relativo pianeta, e nel movimento di un pianeta, particolarmente quando si trova in congiunzione con altri pianeti, di massa rilevante. D'altra parte, si potranno diminuire gli errori introdotti nella (4) e nella (7), per ottenere formole maggiormente approssimate: le quali, non solo si prestino ad un ulteriore confronto dei principii della teoria coll'esperienza,

ma agevolino il compito, divenuto più difficile, dell'esperienza medesima.

La deviazione dal movimento kepleriano è un fatto perfettamente accertato e studiato. Essa costituisce il fenomeno delle perturbazioni planetarie, quando si connette colla congiunzione di pianeti di forte massa. In codesto campo, il confronto della teoria coll'esperienza ha constatato, di regola, il più soddisfacente accordo, ed ha recato il celebre risultato che Leverrier scoperse col calcolo (1845) il pianeta Nettuno, in seguito (1846) veduto da Galle. Invece formano sempre oggetto di discussione, sotto l'aspetto del confronto colla teoria, le deviazioni attinenti al movimento di Mercurio e della Luna.

Problema degli n corpi.

§ 160. — La (4) del § 158, indicando con x, y, z e con x', y', z' le coordinate ordinarie del corpo a cui si riferisce $\mathbf{R}$ e del corpo generico in presenza, si traduce nelle tre equazioni scalari

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varkappa^2 \sum m' \frac{x'-x}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \varkappa^2 \sum m' \frac{y'-y}{r^3}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \varkappa^2 \sum m' \frac{z'-z}{r^3}.$$

Quindi, concepiti n corpi (sempre rappresentati da punti materiali) isolati l'uno coll'altro (con effetto sensibile), si possono scrivere, per l'intero insieme, le n terne

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x_i}{dt^2} = \varkappa^2 \sum_j m_j \dfrac{x_j - x_i}{r_{ij}^3}, \\ \dfrac{d^2y_i}{dt^2} = \varkappa^2 \sum_j m_j \dfrac{y_j - y_i}{r_{ij}^3}, \\ \dfrac{d^2z_i}{dt^2} = \varkappa^2 \sum_j m_j \dfrac{z_j - z_i}{r_{ij}^3}, \\ (i, j = 1, 2, \ldots, n) \qquad (j \neq i). \end{cases}$$

Le quali costituiscono un sistema di $3n$ equazioni alle derivate ordinarie del 2.° ordine, dove il tempo t funge da variabile indipendente, e le x_i, y_i, z_i $(i=1,2,\ldots,n)$ rappresentano le incognite, atte a definire univocamente codeste come funzioni del tempo t, col concorso dei valori delle medesime, e delle loro derivate rispetto al tempo, cioè col concorso del posto e della velocità dei singoli corpi, ad un istante determinato.

La risoluzione, o integrazione, delle equazioni (1) si traduce nella determinazione di $6n$ integrali primi, fra loro indipendenti: cioè di $6n$ equazioni della forma

$$\varphi\left(t, x_i, y_i, z_i, \frac{dx_i}{dt}, \frac{dy_i}{dt}, \frac{dz_i}{dt}\right) = \alpha$$
$$(i=1,2,\ldots,n)$$

dove α indica una costante arbitraria, colla condizione che nessuna delle $6n$ funzioni φ dipenda dalle relative variabili pel tramite delle rimanenti.

Ora, dieci di queste equazioni si formano senz'altro, invocando i teoremi generali della Dinamica. Al qual proposito, premettiamo che gli elementi del campo τ, di massa $kd\tau$, delle nostre formole generali vengono rappresentati, nel presente caso, dai punti materiali, componenti il sistema, di coordinate x_i, y_i, z_i e di massa m_i, con $i=1,2,\ldots,n$, per modo che a $\int_\tau \ldots kd\tau$ va ora surrogato $\Sigma_i m_i \ldots$

Il teorema della conservazione del movimento del centro di massa, valido perchè il sistema degli n punti costituisce un mobile isolato (cfr. § 83), fornisce in primo luogo,

$$(2) \quad \sum_i m_i x_i = a + \alpha t, \qquad \sum_i m_i y_i = b + \beta t, \qquad \sum_i m_i z_i = c + \gamma t$$

dove $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ indicano costanti arbitrarie. E questi sono equivalenti ai sei integrali primi, che se ne ricavano, i primi tre,

derivando senz'altro rispetto a t, e i secondi tre, derivando rispetto a t, dopo aver diviso entrambi i membri per lo stesso t,

$$(3)\left\{\begin{array}{lll} \sum_i m_i \frac{dx_i}{dt} = \alpha, & \sum_i m_i \frac{dy_i}{dt} = \beta, & \sum_i m_i \frac{dz_i}{dt} = \gamma \\ \sum m_i\left(x_i - t\frac{dx_i}{dt}\right) = a, & \sum_i m_i\left(y_i - t\frac{dy_i}{dt}\right) = b, & \sum_i m_i\left(z_i - t\frac{dz_i}{dt}\right) = c. \end{array}\right.$$

I primi tre rappresentano il teorema della conservazione della quantità di moto (§ 84).

Il teorema della conservazione delle aree, rispetto al punto fisso fungente da origine, valido per la suddetta ragione (cfr. § 92), fornisce, alla sua volta, immediatamente i tre integrali primi

$$\sum_i m_i\left(y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt}\right) = \mathcal{A},$$

$$\sum_i m_i\left(z_i \frac{dx_i}{dt} - x_i \frac{dz_i}{dt}\right) = \mathcal{B},$$

$$\sum_i m_i\left(x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt}\right) = \mathcal{C},$$

dove $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ indicano tre costanti arbitrarie.

Infine, la forza motrice elementare, essendo rappresentata da

$$\varkappa^2 m_1 m_2 \operatorname{grad} \frac{1}{r},$$

è centrale. Per cui il sistema delle forze motrici applicate ai punti, che, sempre per la suddetta ragione, è sistema di forze interne centrali, ammette potenziale: e codesto, essendo

$$\left|\operatorname{grad} \frac{1}{r}\right| = \frac{1}{r^2},$$

e la forza elementare in discorso attrattiva, riesce rappresentato da

$$\frac{1}{2}\varkappa^2 \sum_{ij} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}$$

(cfr. § 131). Quindi si verifica il teorema della conservazione della forza viva (§ 132): il quale fornisce l'integrale primo

$$\sum_i m_i \left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right] - \varkappa^2 \sum_{ij} \frac{m_i\, m_j}{r_{ij}} = h\,,$$

h indicando una costante arbitraria.

I rimanenti integrali non si possiedono, in generale, che nel caso di $n=2$.

§ 161. — *Problema dei due corpi.* Supposto $n=2$, sottraendo l'una dall'altra le equazioni omologhe delle due terne (1) $(i,j=1,2)$, si ottiene, con opportuna scrittura,

$$(4)\quad \frac{d^2\xi}{dt^2} = -\varkappa^2 \frac{m_1+m_2}{r^2}\frac{\xi}{r}\,,\quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = -\varkappa^2 \frac{m_1+m_2}{r^2}\frac{\eta}{r}\,,\quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = -\varkappa^2 \frac{m_1+m_2}{r^2}\frac{\zeta}{r}$$

dove è

$$\xi = x_1 - x_2\,,\quad \eta = y_1 - y_2\,,\quad \zeta = z_1 - z_2\,,\quad r = \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\,.$$

Così, le (3) sono le equazioni appartenenti al movimento del corpo 1, riferito al corpo 2. E questo movimento risulta, per le stesse (4), il movimento centrale, col punto 2 per centro, e l'accelerazione convergente, e inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal centro.

I risultati attinenti a questo movimento sono noti per la Cinematica. I sei integrali primi, che rappresentano il sistema integrale delle (4), si trovano per mezzo di quadrature. La trajettoria del punto mobile, fra gli altri particolari, è una conica, di cui il centro del movimento occupa un foco.

Cotesti integrali contano per altrettanti integrali primi del problema dei due corpi. I rimanenti sei sono quelli forniti, conformemente a (3), dal teorema della conservazione del movimento del centro di massa, che sono manifestamente indipendenti da quelli.

Questi ultimi integrali determinano il movimento del centro di massa, conformemente a (2). Coi precedenti poi, in quanto determinano il movimento di 1 riferito a 2, si determina anche, senz' altro, il movimento di ciascuno dei due corpi, riferito al centro di massa. Basta osservare che codesto dividerà, ad ogni istante, il segmento terminato ai due punti, cioè il raggio vettore descritto da 2 a 1, in parti inversamente proporzionali alle masse dei due punti.

§ 162. — *Il problema dei tre corpi, e degli n corpi,* in generale, riusciti infruttuosi i tentativi per trovare altri integrali delle relative equazioni differenziali, oltre gl'indicati, è stato oggetto di molteplici studii, sotto varii aspetti. Si è intanto dimostrato che quelle equazioni non possono ammettere altri integrali algebrici, come i suddetti, rispetto alle coordinate, alle componenti della velocità, e al tempo, per modo che ogni altro integrale non può altrimenti che appartenere al campo trascendente [1]. Si è poi considerato il problema diversamente particolarizzato. Si sono indagate la possibilità e le circostanze di forme prestabilite del movimento, corrispondenti a particolari configurazioni e distribuzioni della velocità, all' istante iniziale [2]. E si è ancora introdotta la semplificazione di ipotesi approssimative. Al qual proposito, segnaliamo il " problema ristretto dei tre corpi ": come chiama Poincaré il problema dei tre corpi, ridotto colle ipotesi: 1) che ad un corpo competa massa sensibilmente nulla, per modo da non perturbare il movimento degli altri due, 2) che questo movimento sia circolare uniforme, intorno al loro comun centro di massa, 3) che il

---

[1]) Bruns. *Ueber die Integrale des Vielkörper-Problems* (Acta Mathematica t. 11, 1887).

[2]) P. Pizzetti. *Casi particolari del problema dei tre corpi* (Rendic. della R. Accademia dei Lincei (5) t. XIII, 1904). Interessante Nota, che reca nuovi contributi all' argomento e lo riassume nel suo complesso.

primo corpo si mova nel piano di questo movimento [1]). Tale è il caso di un satellite di Giove, di Giove e del Sole, trascurando l'inclinazione delle orbita: o di un proiettile, lanciato nello spazio dall'equatore terrestre, della Terra e della Luna, trascurando l'inclinazione dell'orbita di questa rispetto al piano dell'equatore. La vastità delle ricerche relative a questo caso vale a formarsi un adeguato concetto della estrema complicazione del problema generale.

Movimento di un gruppo planetario.

§ 163. — La seguente questione è un esempio assai istruttivo dell'applicazione del metodo generale.

Chiamiamo gruppo planetario un insieme di corpi puntiformi, le cui mutue distanze, e, per conseguenza, le loro distanze dal comune centro di massa, sono piccolissime, in confronto della distanza dello stesso centro di massa da un corpo, egualmente puntiforme, in presenza, che diremo " sole ". Nell'applicazione all'Astronomia, i corpi componenti il gruppo planetario rappresentano un pianeta e i suoi satelliti. E, le masse dei satelliti essendo assai piccole in confronto di quella del pianeta, il comun centro di massa del gruppo coincide sensibilmente col pianeta.

Poniamo nel sole l'origine degli assi di riferimento, detti altrimenti assi fissi, e nel centro di massa del gruppo l'origine di un sistema d'assi mobili, paralleli ai suddetti, per chiamare movimento riferito al centro di massa del gruppo il movimento di un punto relativo a questi assi, considerati come fissi (§ 91).

---

[1]) H. Poincaré. *Sur le problème des trois corps etc.* (Acta Mathematica t. XIII, 1890).

T. Levi Civita. *Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps* (Ibid. t. XXX, 1904).

Indichiamo con x, y, z le coordinate del centro di massa del gruppo rispetto agli assi fissi: con ξ_i, η_i, ζ_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ le coordinate del corpo generico del gruppo rispetto agli assi mobili: con m_i la massa di questo corpo: con r_i la sua distanza dal sole: con r_{ij} la sua distanza da un altro corpo qualunque del gruppo $(j \neq i)$: con m la massa del gruppo, per modo che

$$m = \sum_i m_i : \tag{1}$$

finalmente con M la massa del sole.

Il teorema del movimento del centro di massa (§ 80) ci dà, in primo luogo,

$$\left\{\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= -\varkappa^2 \mathrm{M} \sum_i m_i \frac{x+\xi_i}{r_i^3}\,, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= -\varkappa^2 \mathrm{M} \sum_i m_i \frac{y+\eta_i}{r_i^3}\,, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= -\varkappa^2 \mathrm{M} \sum_i m_i \frac{z+\zeta_i}{r_i^3}\,. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Inoltre, in conseguenza della legge del parallelogrammo delle forze (§ 43, III, *a)*), e del teorema di Coriolis (§ 54,), pel movimento di ogni corpo del gruppo, riferito al centro di massa, si ha la terna di equazioni

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2\xi_i}{dt^2} &= -\varkappa^2 \mathrm{M} \frac{x+\xi_i}{r_i^3} + \varkappa^2 \sum_j m_j \frac{\xi_j-\xi_i}{r_{ij}^3} - \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2\eta_i}{dt^2} &= -\varkappa^2 \mathrm{M} \frac{y+\eta_i}{r_i^3} + \varkappa^2 \sum_j m_j \frac{\eta_j-\eta_i}{r_{ij}^3} - \frac{d^2y}{dt^2} \\ \frac{d^2\zeta_i}{dt^2} &= -\varkappa^2 \mathrm{M} \frac{z+\zeta_i}{r_i^3} + \varkappa^2 \sum_j m_j \frac{\zeta_j-\zeta_i}{r_{ij}^3} - \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned}\right. \tag{3}$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, n\ ,\ j \neq i).$$

Le equazioni (2), (3) costituiscono un sistema di $3+3n$ equazioni differenziali, dove il tempo funge da variabile indipendente,

e le incognite, in numero parimente di $3+3n$, sono rappresentate dalle x, y, z, ξ_i, η_i, ζ_i $(i=1,2,\ldots,n)$.

Ora, osserviamo che è bensì vero che, per formare le (2), occorrono le sole forze esterne: ma queste equazioni involgono le ξ_i, η_i, ζ_i, per la determinazione delle quali in funzione di t, bisogna considerare le (3), formate col concorso delle forze interne. Il movimento del centro di massa si può però *calcolare* indipendentemente dalle forze interne, in via di prima, ed anche di seconda approssimazione (cfr. § 80, *Osservazione*).

§ 164. — *Prima approssimazione.* Poniamo

$$(4) \qquad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \qquad \rho_i=\sqrt{\xi_i^2+\eta_i^2+\zeta_i^2},$$

per modo che r e ρ_i rappresentano la distanza del centro di massa dal sole, e la distanza del corpo generico del gruppo dallo stesso centro di massa.

In prima approssimazione, potremo trascurare l'aggiunta di $\frac{\rho_i}{r}$ a 1. Ciò torna ridurre r_i a r, $x+\xi_i$, $y+\eta_i$, $z+\zeta_i$ a x, y, z. Con che le (2) diventano

$$(5) \qquad \frac{d^2x}{dt^2}=-\varkappa^2 M\frac{x}{r^3}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=-\varkappa^2 M\frac{y}{r^3}, \qquad \frac{d^2z}{dt^2}=-\varkappa^2 M\frac{z}{r^3}$$

e le (3)

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi_i}{dt^2}=\varkappa^2\sum_j m_j\dfrac{\xi_j-\xi_i}{r_{ij}^3}, \\[2ex] \dfrac{d^2\eta_i}{dt^2}=\varkappa^2\sum_j m_j\dfrac{\eta_j-\eta_i}{r_{ij}^3}, \\[2ex] \dfrac{d^2\zeta_i}{dt^2}=\varkappa^2\sum_j m_j\dfrac{\zeta_j-\zeta_i}{r_{ij}^3}. \end{cases}$$

Per le (5), il movimento del centro di massa è il movimento kepleriano determinato dal sole. Per le (6), il movimento del

gruppo, riferito al centro di massa, è il movimento degli n corpi (§ 160).

§ 165. — *Seconda approssimazione.* Con una seconda approssimazione, trascuriamo l'aggiunta ad 1 delle potenze di $\frac{\rho_i}{r}$, cominciando dal quadrato.

Poniamo

$$-\frac{x}{r}=\alpha, \qquad -\frac{y}{r}=\beta, \qquad -\frac{z}{r}=\gamma,$$

$$\alpha\xi_i+\beta\eta_i+\gamma\zeta_i=p_i,$$

con che α, β, γ sono i coseni di direzione del raggio vettore condotto dal sole al centro di massa, volto verso il sole, e p_i la coordinata del corpo generico, relativa ad un asse così orientato, e al centro di massa come origine.

Abbiamo

$$\begin{aligned} r_i &= \sqrt{(x+\xi_i)^2+(y+\eta_i)^2+(z+\zeta_i)^2} = \sqrt{r^2+2(x\xi_i+y\eta_i+z\zeta_i)+\rho_i^2} \\ &= r\sqrt{1-2\frac{1}{r}(\alpha\xi_i+\beta\eta_i+\gamma\zeta_i)} = r\left(1-\frac{\alpha\xi_i+\beta\eta_i+\gamma\zeta_i}{r}\right) \\ &= r\left(1-\frac{p_i}{r}\right). \end{aligned}$$

Ne viene

$$\frac{1}{r_i^3}=\frac{1}{r^3}\left(1+\frac{p_i}{r}\right)^3=\frac{1}{r^3}\left(1+\frac{3p_i}{r}\right)$$

$$\frac{x+\xi_i}{r_i^3}=\frac{1}{r^2}\left(-\alpha+\frac{\xi_i}{r}\right)\left(1+\frac{3p_i}{r}\right)=-\frac{\alpha}{r^2}+\frac{\xi_i}{r^3}-\frac{3p_i}{r^3}\alpha.$$

D'altra parte, fungendo il centro di massa da origine delle coordinate $\xi_i, \eta_i, \zeta_i, p_i$, si ha

$$\sum_i m_i\xi_i=0, \quad \sum_i m_i\eta_i=0, \quad \sum_i m_i\zeta_i=0, \quad \sum_i m_ip_i=0.$$

Quindi, le (2) diventano, tenendo pure conto di (1),

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\varkappa^2 M}{r^2}\alpha, \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\varkappa^2 M}{r^2}\beta, \qquad \frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\varkappa^2 M}{r^2}\gamma,$$

coincidenti colle (5). Vale a dire il movimento del centro di massa rimane il movimento kepleriano, determinato dal sole.

Le (3) poi diventano, alla lor volta,

$$\frac{d^2\xi_i}{dt^2}=\varkappa^2\sum_j m_j\frac{\xi_j-\xi_i}{r^3_{ij}}-\frac{\varkappa^2 M\xi_i}{r^3}+\frac{3\varkappa^2 Mp_i}{r^3}\alpha$$

$$\frac{d^2\eta_i}{dt^2}=\varkappa^2\sum_j m_j\frac{\eta_j-\eta_i}{r^3_{ij}}-\frac{\varkappa^2 M\eta_i}{r^3}+\frac{3\varkappa^2 Mp_i}{r^3}\beta$$

$$\frac{d^2\zeta_i}{dt^2}=\varkappa^2\sum_j m_j\frac{\zeta_j-\zeta_i}{r^3_{ij}}-\frac{\varkappa^2 M\zeta_i}{r^3}+\frac{3\varkappa^2 Mp_i}{r^3}\gamma.$$

Così, il sole interviene nella determinazione del movimento del gruppo riferito al centro di massa del gruppo medesimo, con un sistema di forze motrici, applicate ai singoli punti o corpi, dette " forze perturbatrici del sole ". Le quali, per ciascun punto, si compongono di due termini: il primo, avente grandezza $\varkappa^2\frac{m_i M\rho_i}{r^3}$, e l'orientazione del raggio vettore condotto dal centro di massa al punto, volto verso il centro di massa — " forza di concentrazione " verso il centro di massa —: il secondo, avente grandezza $3\varkappa^2\frac{m_i M|p_i|}{r^3}$, la direzione del raggio vettore condotto dal sole al centro di massa, e il senso che, dal piano perpendicolare a questo raggio, passante pel centro di massa, volge verso il punto (quindi opposto dalle due opposte parti del piano) — " forza di frattura " secondo questo piano.

Osserviamo che, conformemente al concetto del § 49, le due forze così nominate introducono, ciascuna, un termine avente la propria orientazione, nell' espressione ridotta, al modo indicato, dello

spostamento del relativo corpo del gruppo, fra il tempo t e il tempo $t+\mathrm{D}t$, appartenente al considerato movimento riferito al centro di massa. Che se si suppone prevalere il secondo, se ne desume un' " azione „ del sole, che provoca la disaggregazione del gruppo. Circostanza, che serve di fondamento alla insigne teoria di Schiaparelli della formazione di uno sciame di meteoriti coi detriti di una cometa.

Forza motrice elementare newtoniana.

§ 166. — Estendendo, per induzione, il risultato trovato per due corpi celesti, considerati come isolati l'uno coll'altro (§ 157), al caso di due corpi qualunque, allo stato neutro, le cui dimensioni siano piccolissime in confronto della loro media distanza, stabiliamo che la forza motrice elementare (§ 68) relativa alla condizione fisica chiamata stato neutro o naturale, e colla riserva della mancanza del contatto fra i corpi considerati, sia rappresentata da

$$\varkappa^2 m_1 m_2 \operatorname{grad} \frac{1}{r}, \tag{1}$$

dove, nel formare il gradiente, va considerato come variabile il punto a cui la forza motrice in discorso si riferisce.

Vale a dire, la direzione di detta forza motrice elementare sarà quella della retta dei due punti, il senso quello di questa retta, volto dal punto a cui si riferisce la forza motrice verso il punto in presenza, e la grandezza rappresentata da

$$\frac{\varkappa^2 m_1 m_2}{r^2},$$

indicando con m_1, m_2 le masse dei due punti, r la loro mutua distanza, e $\varkappa^2$ una costante positiva, indipendente dai due punti, cioè indipendente dalla specie dei corpi considerati.

Il significato di questo discorso, rammentiamo (cfr. § 70), è il seguente. Concepito un corpo naturale, rappresentato, ad un istante, dal campo τ, luogo del punto P, in presenza, di un altro corpo naturale, rappresentato, allo stesso istante, dal campo τ', luogo del punto P′, e indicate con k e k' le densità in P e in P′, nell'ipotesi che la condizione fisica sia lo stato naturale, e colla riserva che i due corpi non vengano a contatto, la forza acceleratrice esterna $\mathbf{F}^*$ appartenente al punto P sarà rappresentata da

$$\mathbf{F}^* = \varkappa^2 \int_{\tau'} \mathrm{grad}_{\mathrm{P}} \frac{1}{r} \, k' d\tau', \tag{2}$$

dove con $\mathrm{grad}_{\mathrm{P}}$ si indica che il gradiente va preso rispetto a P.

Ciò che significa, alla sua volta, che, indicando con $\mathbf{R}^*$, $\mathbf{M}^*$, $\mathcal{P}^*$ il risultante del sistema di forze motrici esterne, applicate ai punti del primo corpo, il momento rispetto ad un polo O, la potenza corrispondente ad un atto di movimento, per cui $\mathbf{V}$ è la velocità del punto P, dello stesso sistema di forze motrici esterne, sarà

$$\mathbf{R}^* = \varkappa^2 \int_{\tau} k d\tau \int_{\tau'} \mathrm{grad}_{\mathrm{P}} \frac{1}{r} \, k' d\tau'$$

$$\mathbf{M}^* = \varkappa^2 \int_{\tau} k d\tau \int_{\tau'} (\mathrm{P} - \mathrm{O}) \wedge \mathrm{grad}_{\mathrm{P}} \frac{1}{r} \, k' d\tau'$$

$$\mathcal{P}^* = \varkappa^2 \int_{\tau} k d\tau \int_{\tau'} \mathrm{grad}_{\mathrm{P}} \frac{1}{r} \times \mathbf{V} \, k' d\tau'$$

Funzione delle forze della forza acceleratrice newtoniana.

§ 167. — Il vettore $\mathbf{F}^*$, definito da (2) del precedente §, si chiama la forza acceleratrice newtoniana, determinata dal corpo τ', di densità k', nel campo esterno allo stesso corpo.

Indicando con X^*, Y^*, Z^* le sue componenti secondo una terna di assi coordinati, con x, y, z le coordinate di P, con x', y', z' le coordinate di P', la (2) significa che si ha

$$X^* = \varkappa^2 \int_{\tau'} \frac{1}{r^2} \frac{x'-x}{r} k' d\tau' = \varkappa^2 \int_{\tau'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} k' d\tau' = \varkappa^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau'} \frac{k' d\tau'}{r},$$

dove il passaggio al quarto membro è, senz'altro, lecito, perchè, essendo P esterno al campo τ', sarà sempre $r > 0$.

Posto

$$\int_{\tau'} \frac{k' d\tau'}{r} = \varphi,$$

si ha quindi

$$X^* = \varkappa^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad Y^* = \varkappa^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad Z^* = \varkappa^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

o, come subito si rileva dalla definizione del gradiente (§ 157),

$$\mathbf{F}^* = \varkappa^2 \operatorname{grad} \varphi.$$

Così, la forza acceleratrice in discorso ammette funzione delle forze (§ 126), rappresentata da

$$U^* = \varkappa^2 \varphi.$$

Funzione potenziale di un corpo in un punto.

§ 168. — Posto, come nel precedente §,

$$\varphi = \int_{\tau'} \frac{k' d\tau'}{r},$$

e inteso che r rappresenti la distanza del punto generico P' del campo τ' da un punto P *esterno* a questo campo, φ riesce una funzione delle coordinate del punto P, continua e finita, dotata

delle derivate rispetto alle stesse coordinate, di ogni ordine, ottenibili colla derivazione sotto al segno. Ciò risulta immediatamente dalle proprietà degli integrali, considerati come funzioni di parametri impliciti nella funzione integranda.

Essa si chiama la " funzione potenziale „ del corpo indicato, nel punto P, ed ha grande importanza in molte questioni di Fisica Matematica, anche estranee al presente argomento.

Si riconosce subito che, col tendere di P all'infinito, φ tende a 0 come $\frac{1}{r}$, e $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ come $\frac{1}{r^2}$. E si dimostra facilmente che, col tendere di P ad un punto del contorno di τ', φ e $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ tendono a limiti finiti.

Infine, essendo

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x'-x}{r^3} = \frac{-r^2+3(x'-x)^2}{r^5},$$

si ha

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} = 0.$$

Quindi, anche

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Crosta sferica a strati omogenei. Teorema di Newton.

§ 169. — " Crosta sferica „ si chiama, in generale, la figura limitata da due superficie sferiche concentriche: " crosta sferica a strati omogenei „, il corpo, rappresentato da una crosta sferica, nell'ipotesi che la densità sia costante sopra ogni superficie sferica concentrica al contorno.

§ 170. — Per calcolare la massa

$$m' = \int_{\tau'} k' d\tau'$$

di una crosta sferica a strati omogenei, adoperiamo un sistema di coordinate sferiche, col polo nel centro della crosta, ρ', θ', ω', così indicando il raggio vettore, la colatitudine e la longitudine.

Si ha notoriamente

$$d\tau' = \rho'^2 \sin\theta' \, d\rho' \, d\theta' \, d\omega' .$$

Quindi, mettendo in evidenza colla scrittura $k'(\rho')$ che k' è funzione della sola ρ',

$$m' = \int_0^{2\pi} d\omega' \int_0^{\pi} \sin\theta' \, d\theta' \int_{\rho'_1}^{\rho'_2} k'(\rho') \rho'^2 d\rho' .$$

dove ρ'_1, ρ'_2 indicano i valori di ρ' per le due superficie sferiche formanti il contorno.

E di qua, eseguendo l'integrazione rispetto a ω' e a θ',

$$m' = 4\pi \int_{\rho'_1}^{\rho'_2} k'(\rho') \rho'^2 d\rho' . \tag{1}$$

§ 171. — Per calcolare la funzione potenziale della stessa crosta sferica a strati omogenei in un punto P, il quale potrà trovarsi o nel cavo della crosta o fuori, facciamo passare per questo punto l'asse polare, e indichiamo con ρ il raggio vettore dello stesso punto, cioè la sua distanza dal centro della crosta. Abbiamo

$$r = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos\theta'} , \tag{2}$$

dove il radicale va inteso positivo. Quindi

$$\varphi = \int_{\tau'} \frac{k' d\tau'}{r} = \int_0^{2\pi} d\omega' \int_{\rho'_1}^{\rho'_2} k'(\rho') \rho'^2 d\rho' \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta' d\theta'}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos\theta'}}$$

$$= 2\pi \int_{\rho'_1}^{\rho'_2} k'(\rho') \rho'^2 d\rho' \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta' d\theta'}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos\theta'}}.$$

Ora

$$\frac{\sin\theta' d\theta'}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos\theta'}} = \frac{-d\cos\theta'}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos\theta'}} = \frac{1}{\rho\rho'} d\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos\theta'}.$$

Quindi

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta' d\theta'}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos\theta'}} = \frac{1}{\rho\rho'}\left(\sqrt{(\rho' + \rho)^2} - \sqrt{(\rho' - \rho)^2}\right):$$

dove, per (2), le radici devono essere positive. Per modo che si prenderà sempre $\rho + \rho'$ per la prima, e $\rho - \rho'$ o $\rho' - \rho$ per la seconda, a norma che è $\rho > \rho'$ o $\rho < \rho'$, cioè il punto esterno o interno al cavo della crosta.

Distinguendo cogli indici *i* ed *e* i due casi del punto interno ed esterno al cavo (sempre esterno alla crosta), abbiamo così

$$\varphi_i = 4\pi \int_{\rho'_1}^{\rho'_2} k'(\rho') \rho' d\rho',$$

indipendente dal posto del punto considerato, e

$$\varphi_e = \frac{4\pi \int_{\rho'_1}^{\rho'_2} k'(\rho') \rho'^2 d\rho'}{\rho},$$

ossia, per (1),

$$\varphi_e = \frac{m'}{\rho},$$

funzione potenziale di un punto materiale, avente la massa m' della crosta, e posto nel suo centro.

§ 172. — Ne viene (§ 167) che, negli stessi due casi, appartiene alla forza acceleratrice, determinata dalla crosta sferica a strati omogenei, nel campo esterno, la funzione delle forze $\varkappa^2\varphi_i$ e $\varkappa^2\varphi_e$. Donde scaturisce il

Teorema di Newton. La forza acceleratrice newtoniana, determinata da una crosta sferica a strati omogenei, nei punti del cavo, è nulla, e, nei punti dello spazio, che si estende dal contorno esterno della crosta all'infinito, equiparabile alla forza acceleratrice, determinata da un punto materiale, avente la massa della crosta, e posto nel suo centro.

§ 173. — Il risultante e il momento, rispetto ad un polo qualunque, del sistema delle forze motrici, determinate, conformemente alla forza motrice elementare newtoniana, da una crosta sferica a strati omogenei, nei punti di un corpo naturale, saranno senz'altro nulli, se il corpo è posto nel cavo (§§ 166, 167, 172).

Se invece il corpo è posto fuori, si avrà (cfr. gli stessi §§), indicando con ρ la distanza del punto generico P del corpo dal centro della crosta, e con C′ codesto punto

$$\mathbf{R}^* = \int_\tau \mathbf{F}^* k d\tau = \varkappa^2 m' \int_\tau \text{grad}_P \frac{1}{\rho} k d\tau = -\varkappa^2 m' \int_\tau \text{grad}_{C'} \frac{1}{\rho} k d\tau$$

$$= -\varkappa^2 m' \,\text{grad}_{C'} \int_\tau \frac{k d\tau}{\rho}, \qquad \text{(cfr. § 167)}$$

o infine

$$\mathbf{R}^* = -\varkappa^2 m' \,\text{grad}_{C'} \varphi, \tag{3}$$

indicando con φ la funzione potenziale del corpo nel centro C′ della crosta (§ 168).

Inoltre

$$(4)\quad \mathbf{M}^*_{C'} = \int_\tau (P-C') \wedge \mathbf{F}^* k d\tau = \varkappa^2 m' \int_\tau (P-C') \wedge \operatorname{grad}_P \frac{1}{\rho} k d\tau = 0 ,$$

perchè $P-C'$ e $\operatorname{grad}_P \frac{1}{\rho}$ sono paralleli.

Per (3), se il corpo considerato è pure una crosta sferica a strati omogenei, indicandone con C il centro, con m la massa, e con $\bar\rho$ designando la mutua distanza dei due centri, si ha (§ 171)

$$\mathbf{R}^* = -\varkappa^2 m m' \operatorname{grad}_{C'} \frac{1}{\bar\rho} = \varkappa^2 m m' \operatorname{grad}_C \frac{1}{\bar\rho} .$$

Nello stesso caso, la direzione del risultante riesce così quella della retta dei centri. Donde segue, per (4), che sarà anche

$$\mathbf{M}^*_C = 0.$$

Confronto della forza motrice elementare newtoniana coll'esperienza. Principio della gravitazione universale.

§ 174. — Collo stabilire, nel modo indicato, la forza motrice elementare newtoniana (§ 166), abbiamo identificato colla forza motrice di un corpo celeste, concepito isolato con un altro, quale si deduce dalle leggi di Kepler, la forza motrice di un corpo naturale qualsivoglia, concepito isolato con un altro, nell'ipotesi che la condizione fisica sia lo stato neutro, e colla riserva della mancanza del contatto fra i due corpi considerati.

I precedenti risultati (§§ 171-173) permettono di fare, a questo proposito, efficaci verificazioni sperimentali.

§ 175. — Abbiamo i due seguenti risultati dell'esperienza.

1) Per la legge di Kepler (§ 152), e per la effettiva misura el raggio medio a dell'orbita lunare, e della durata $\mathfrak{T}$ della ri-

voluzione lunare, che forniscono

$$a = 60\,R \quad (R = \text{raggio medio terrestre}) \quad \mathfrak{T} = 39343 \times 60^{s}.$$

la quantità A dell'accelerazione del movimento della Luna, riferito alla Terra, risulta (§ 154)

$$(1) \qquad A = 4\,\pi^2 \frac{a}{\mathfrak{T}^2} = 2\,\pi\,\frac{2\,\pi\,\mathrm{R} \times 60}{\mathfrak{T}^2} = \frac{\pi \times 4000000}{39343^2 \times 3} \left[\frac{\text{metro}}{\text{secondo}^2}\right].$$

2) Per appropriati esperimenti, la quantità G della accelerazione del movimento riferito alla Terra di un corpo, in prossimità della superficie terrestre, libero di moversi entro uno spazio piccolissimo, in confronto delle dimensioni del globo terrestre, è data da

$$(2) \qquad G = 9{,}8 \left[\frac{\text{metro}}{\text{secondo}^2}\right].$$

(§ 56).

D'altra parte,

1) per la teoria, limitata al movimento degli astri, si ha, indicando con m la massa della Terra (§ 157),

$$(3) \qquad A = \frac{\varkappa^2 m}{a^2}.$$

2) per la teoria, fondata col concorso della forza motrice elementare newtoniana, concependo la Terra come una sfera di raggio R, a strati omogenei, e reputando trascurabile il contributo delle forze apparenti del movimento relativo, nella formazione di G (§ 56), si ha (§ 167)

$$(4) \qquad G = \frac{\varkappa^2 m}{R^2}.$$

Ora, da (3) e (4) si deduce

$$G = \left(\frac{a}{R}\right)^2 A.$$

E introducendo in questa formola il risultato sperimentale 1), cioè facendo $a/R = 60$, e ponendo per A il valore dato da (1), se ne ricava,

$$G = 9,7 \left[\frac{\text{metro}}{\text{secondo}^2}\right],$$

che collima perfettamente con (2), cioè col risultato sperimentale 2).

Questa verificazione risale a Newton, il quale fondò sopra di essa il suo grande principio della gravitazione universale, identificando colla gravità la forza da cui i corpi celesti sono mantenuti nelle loro orbite [1]).

§ 176. — Rileviamo ancora che la teoria, nelle indicate ipotesi, assegna alla accelerazione determinata dal globo terrestre, in un punto prossimo alla sua superficie, l'orientazione del raggio descritto dal centro del globo al punto, volto verso il centro. La quale collima strettamente coll'orientazione della verticale del luogo, volta in basso, che l'esperienza assegna all'accelerazione del suddetto movimento di un corpo, in prossimità della superficie del globo, relativo al globo medesimo (§ 56).

§ 177. — Sugli stessi precedenti risultati si fonda la verificazione diretta della forza motrice, determinata da una sfera omogenea, nei punti di un'altra sfera omogenea, mobile in prossimità di essa, mediante la "bilancia di Cavendish".

I risultati ottenuti per questa via da Cavendish, e da altri, concordano pienamente colla teoria.

---

[1]) Hactenus vim illam, qua corpora coelestia in orbitis suis retinentur, centripetam appellavimus. Eandem jam gravitatem esse constat, et propterea gravitatem in posterum vocabimus. Nam causa vis illius centripetae, qua luna retinetur in orbe, extendi debet ad omnes planetas per reg. I, II et IV (regulas philosophandi). *(Principia. Lib.* III. *Prop.* V. *Scholium).*

Inoltre, si misura, in tal modo, la quantità γ dell'accelerazione che una sfera omogenea, di massa nota μ, determina in un punto, posto ad una distanza nota ρ dal suo centro.

Allora, scrivendo (§ 167)

$$\gamma = \frac{\varkappa^2 \mu}{\rho^2},$$

si stabilisce un'equazione atta a fornire $\varkappa^2$, "costante della gravitazione universale". Risulta

$$\varkappa^2 = 68 \times 10^{-9} \left[\frac{\text{cm}^3}{\text{gm. sec}^2}\right].$$

La formola relativa alla Terra

$$G = \frac{\varkappa^2 m}{R^2}$$

($R = 6371 \times 10^5$ [cm]) fornisce allora la massa della Terra. Risulta

$$m = \frac{4}{3}\pi \times 6366^3 \times 10^{15} \times 5,5 \ \text{[gm]}.$$

Vale a dire la densità media, k, della Terra risulta

$$k = 5,5 \left[\frac{\text{gm}}{\text{cm}^3}\right].$$

Movimento ed equilibrio per gravità studiato in seconda approssimazione.

§ 178. — L'accelerazione $\mathbf{A}_R$ del movimento di un punto, in prossimità alla superficie della Terra, relativo ad una terna d'assi partecipanti al movimento annuo e al movimento diurno della

stessa Terra (cfr. § 56), è data, pei principii ripetutamente adoperati, da

$$(1) \qquad \mathbf{A}_R = \mathbf{A}^* + \mathbf{A}_T - \mathbf{A}_S + \mathbf{A}_{CC},$$

indicando con $\mathbf{A}^*$ e $\mathbf{A}_T$ l'accelerazione assoluta determinata rispettivamente dai corpi celesti e terrestri, con $\mathbf{A}_S$ l'accelerazione di trascinamento del duplice movimento, con $\mathbf{A}_{CC}$ l' accelerazione centrifuga composta del movimento diurno.

Ora, è

$$(2) \qquad -\mathbf{A}_S = -\mathbf{A}_S^{(a)} + \mathbf{A}_C,$$

indicando con $\mathbf{A}_S^{(a)}$ l'accelerazione di trascinamento proprio del movimento annuo, e con $\mathbf{A}_C$ l'accelerazione centrifuga del movimento diurno.

Sarà quindi $\mathbf{A}_S^{(a)}$ l'accelerazione del centro del globo terrestre La quale, siccome è da reputarsi affatto insensibile la perturbazione prodotta nel movimento dello stesso globo dai corpi terrestri mobili in prossimità di esso, non è altro che l'accelerazione determinata nel centro del globo dai corpi celesti. E allora, a motivo della piccolezza del raggio terrestre in confronto della distanza del suddetto centro dai corpi celesti (cfr. § 158), sarà sensibilmente

$$(3) \qquad \mathbf{A}_S^{(a)} = \mathbf{A}^*.$$

Con questo, e con (2), la (1) si riduce a

$$(4) \qquad \mathbf{A}_R = \mathbf{A}_T + \mathbf{A}_C + \mathbf{A}_{CC}.$$

§ 179. — Supponiamo, in primo luogo, che il punto in discorso appartenga ad un corpo mantenuto in equilibrio (relativo), per mezzo di un sostegno (cfr. 59). In tal caso si ha

$$(5) \qquad \mathbf{A}_R = 0, \qquad \mathbf{A}_{CC} = 0, \qquad \mathbf{A}_T = \mathbf{G} + \mathbf{A}',$$

dove $\mathbf{G}$ rappresenta l'accelerazione determinata nel punto dal globo terrestre, conformemente alla forza motrice elementare newtoniana, o l' “accelerazione di gravitazione universale„, e $\mathbf{A}'$, l'accelerazione determinata separatamente dal sostegno, o “accelerazione di reazione del sostegno„.

Quindi (4) diventa

$$0 = \mathbf{G} + \mathbf{A}' + \mathbf{A}_C,$$

ossia

$$\mathbf{g} + \mathbf{A}' = 0, \tag{6}$$

posto

$$\mathbf{g} = \mathbf{G} + \mathbf{A}_C. \tag{7}$$

Si riconosce subito che $\mathbf{G}$ e $\mathbf{A}_C$, e, per conseguenza $\mathbf{g}$, non varieranno che insensibilmente entro uno spazio assai piccolo, in confronto del globo terrestre. Per modo che, inteso che il supposto punto rappresenti il punto generico di un piccolo corpo di massa m, i vettori, $m\mathbf{G}$, $m\mathbf{A}_C$ e $m\mathbf{g}$ rappresenteranno la forza motrice, rispettivamente, di gravitazione universale, centrifuga, e risultante delle due medesime. Posto quindi

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g},$$

$\mathbf{P}$ rappresenta la suddetta forza motrice risultante: e, indicando con $\mathbf{R}'$ la forza motrice di reazione del sostegno, si ha, per (6),

$$\mathbf{P} + \mathbf{R}' = 0. \tag{8}$$

$\mathbf{P}$, in quanto è la forza motrice “equilibrata„ dalla reazione del sostegno, si chiama il “peso„ del corpo considerato (§ 59). Alla sua volta, $\mathbf{g}$ si chiama, l'accelerazione di gravità: la sua grandezza, g, la grandezza della accelerazione di gravità: la sua direzione, quella della verticale del luogo.

$\mathbf{A}_C$ ha, per ogni punto, l'orientazione della perpendicolare all'asse terrestre, passante pel punto, volta dall'asse verso il punto, e grandezza $\omega^2\rho$, indicando con ω e ρ le grandezze della velocità angolare del movimento diurno, e del raggio del parallelo a cui appartiene il punto: con che è nulla ai poli, e massima all'equatore.

$\mathbf{G}$ si assegna facilmente, per ogni punto, supponendo, come nelle precedenti ricerche, equiparabile il globo terrestre ad una sfera a strati omogenei. Ma va notato, a questo proposito, che la " schiacciamento ", del globo, quale risulta dalle misure geodetiche, è una quantità piccola dello stesso ordine della accelerazione centrifuga. Per modo che non si potrebbe, senza incongruenza, tener conto di questa e trascurar quella, per considerare la Terra come sferica.

Così, la questione si complica, tanto da eccedere i limiti che ci siamo prescritti. Ci basterà rilevare che l'orientazione di $\mathbf{G}$ sarà, ad ogni modo, volta in basso: per cui, a motivo della piccolezza di $|\mathbf{A}_C|$, anche l'orientazione di $\mathbf{g}$ sarà volta in basso. Inoltre, lo stesso schiacciamento fa presumere G massimo ai poli e minimo all'equatore: e, per conseguenza, tale sarà pure il caso di g e di P. Fatti, codesti, tutti conformi all'esperienza [1]).

§ 180. — Sia ora il punto mobile liberamente. Allora

$$\mathbf{A}_T = \mathbf{G},$$

e (4) diventa, introducendovi (7),

$$\mathbf{A}_R = \mathbf{g} + \mathbf{A}_{CC}. \tag{8}$$

Supponiamo ancora che il punto in discorso rappresenti il punto generico di un piccolo corpo, mobile liberamente entro uno spazio invariabilmente unito al globo terrestre, e di dimensioni piccolis-

[1]) I particolari appartengono al compito della Geodesia. V., fra gli ottimi, P. PIZZETTI, *Trattato di Geodesia*. (Bologna, Zanichelli, 1905).

sime in confronto delle dimensioni di codesto. In tal caso, **g** sarà sensibilmente costante, in tutto questo spazio: la sua grandezza g sarà quella della grandezza dell'accelerazione "locale" di gravità, e la sua orientazione, quella della verticale "del luogo", volta in basso.

Introduciamo ora una terna d'assi coordinati ortogonali, assumendo la posizione iniziale del punto mobile considerato per origine, e orientando l'asse delle z come la verticale di detto punto, volta in alto, e l'asse delle x parallelamente al meridiano dello stesso punto, col senso che volge verso mezzogiorno. L'asse delle y risulterà, per conseguenza, orientato perpendicolarmente al meridiano, col senso che volge ad oriente. Indichiamo con φ la latitudine astronomica dell'origine, o, se vogliamo, la latitudine "locale", e con ω la grandezza (assoluta) della velocità angolare del movimento diurno. La (8) si traduce nelle tre equazioni scalari

$$(9) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = 2\omega \sin\varphi \dfrac{dy}{dt} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -2\omega\left(\cos\varphi \dfrac{dz}{dt} + \sin\varphi \dfrac{dx}{dt}\right) \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = -g + 2\omega \cos\varphi \dfrac{dy}{dt}. \end{cases}$$

Integriamo queste equazioni, nell'ipotesi che la velocità iniziale del considerato movimento relativo sia nulla, per modo che si abbia

$$(10) \quad \text{per } t=0\colon \ x=0, \ y=0, \ z=0, \ \frac{dx}{dt}=0, \ \frac{dy}{dt}=0, \ \frac{dz}{dt}=0.$$

E vagliamoci anche della semplificazione che, a motivo della piccolezza di ω, si reputino trascurabili i termini dell'ordine di ω^2 [1]).

---

[1]) Si ottiene così un'approssimazione intermedia fra la prima e la seconda, con cui si trascura l'accelerazione centrifuga, ma si considera l'accelerazione centrifuga composta. Del resto, le (9) si possono integrare anche senza codesta semplificazione.

Dalla prima e dalla terza delle (9), tenendo conto delle (10), si ha

$$\frac{dx}{dt} = 2\omega \sin\varphi\, y \qquad \frac{dz}{dt} = -gt + 2\omega \cos\varphi\, y. \tag{11}$$

Quindi, sostituendo nella seconda, e valendosi della indicata approssimazione,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega\, g \cos\varphi\, t.$$

Donde, integrando, e tenendo conto delle (10),

$$y = \frac{\omega g \cos\varphi}{3}\, t^3. \tag{12}$$

Introducendo questo risultato nelle (11), e valendosi di nuovo della convenuta approssimazione, si ottiene

$$\frac{dx}{dt} = 0, \qquad \frac{dz}{dt} = -gt.$$

E di qua, integrando, subordinatamente alle (10),

$$x = 0, \qquad z = -\frac{1}{2} gt^2.$$

Quindi la traiettoria è contenuta nel piano yz, ossia nel piano passante per la verticale del posto iniziale, perpendicolare al meridiano: dove le sue equazioni, in termini di t, sono

$$y = \frac{\omega g \cos\varphi}{3}\, t^3, \qquad z = -\frac{1}{2} gt^2. \qquad (t \gtreqless 0).$$

Eliminando fra esse t, se ne ricava l'equazione normale

$$y = \frac{\omega \cos\varphi}{3} \sqrt{-\frac{8z^3}{g}},$$

in cui va presa la radice (se non nulla) positiva.

Le ipotesi precedenti traducono il caso concreto di un grave, abbandonato senza velocità iniziale (apparente), ad un'altezza verticale a sul suolo. Ne viene che esso toccherà il suolo, sulla traccia del piano, passante per la verticale del posto iniziale, perpendicolare al meridiano, ad oriente del piede della verticale medesima, e ad una distanza δ, data da

$$\delta = \frac{\omega \cos\varphi}{3} \sqrt{\frac{8a^3}{g}}.$$

È questo il fenomeno della deviazione verso oriente dei gravi liberamente cadenti. E la relativa formola fu verificata da ripetuti esperimenti.

APPENDICE

I.

Nozioni fondamentali del Calcolo del Movimento dei Corpi Naturali.

Posizione spontanea del problema.

Il problema generale del calcolo del movimento dei corpi naturali si pone spontaneamente in questi termini: Dati, ad un istante di un intervallo di tempo (istante iniziale) la posizione (sempre inclusa la configurazione), la velocità dei punti, o atto di movimento, e la densità degli stessi punti di un corpo naturale, e, in tutto l'intervallo di tempo, i corpi reputati (efficacemente) in presenza di esso, e la condizione fisica, trovare la posizione del corpo naturale, ad ogni istante dell'indicato intervallo di tempo.

La posizione dei corpi in presenza, a rigore, va riguardata come da determinarsi, alla sua volta, in connessione con quella del corpo specificato, estendendo anche a codesti il problema posto per quello. Tale è il caso del problema degli n corpi (§ 160). Però, con approssimazione sufficiente, in una quantità di problemi, si può reputare la posizione dei corpi in presenza, nel considerato intervallo di tempo, assegnata *a priori*. È codesto il caso del problema ristretto dei tre corpi (§ 162) e dei movimenti per gravità (§ 178).

Coi corpi in presenza del considerato, e la condizione fisica, riesce determinata la specie del sistema totale delle forze motrici, applicate ai punti del corpo medesimo (§ 145). Il valore di questo sistema di forze motrici, relativo ad ogni istante, dipende dalla posizione allo stesso istante, di tutti i corpi contemplati nel problema. Quando si fa la suddetta restrizione, esso non riesce incognito, se non in quanto dipende dalla posizione del corpo specificato, incognita, all'infuori dell'istante iniziale.

Il compito caratteristico della Meccanica Teorica va inteso esaurito, quando, ridotta la determinazione della posizione del mobile considerato, ad ogni istante, a quella di certe variabili, si stabiliscono equazioni di un tipo contemplato nell'Analisi, atte a fornire le necessarie espressioni delle variabili medesime. Allora il problema si dice tradotto in equazioni. La risoluzione, o almeno la discussione, di queste equazioni, per quanto si soglia incorporare nella stessa Meccanica, diventa più propriamente compito dell'Analisi.

Ora, ogni condizione prescritta al sistema totale delle forze motrici, applicate ai punti di un mobile, è, per la equazione fondamentale (§ 64), condizione prescritta alle accelerazioni dei punti del mobile.

Quindi, riassumendo, il problema in discorso, nella sua forma spontanea, consiste nel tradurre in equazioni di un tipo contemplato nell'Analisi la definizione delle posizioni del mobile considerato, relative ai singoli istanti di un intervallo di tempo qualsivoglia: dati, ad un istante, la posizione, la velocità e la densità di tutti i punti del mobile, e, in tutto l'intervallo di tempo, prescritte certe condizioni alle accelerazioni degli stessi punti.

Concetto del vincolo e relativa distinzione cardinale.

Per risolvere il problema, occorre, in generale, accrescere i dati, col prescrivere certe condizioni, in tutto l'intervallo di tempo,

o alla posizione del mobile, o alle velocità de' suoi punti, cioè al suo atto di movimento. Ogni condizione così fatta si chiama un " vincolo „ imposto al movimento.

Si possono immaginare condizioni simili per la densità. Ma codeste, per l'equazione intrinseca del movimento (§§ 15, 16), si traducono, di regola, in corrispondenti condizioni per l'atto di movimento.

Così, sono esempii di vincoli imposti al movimento di un corpo naturale, la condizione che il mobile sia rigido — o che si componga di pezzi rigidi — o che sia rigido, con un punto, o una retta fissi, o in movimento prescritto — o colla prescrizione di toccare un piano fisso, o in movimento prescritto, aggiunta, se occorre, la restrizione della mancanza dello strisciamento. Come pure, la condizione che il movimento conservi l'ordine delle linee e delle superficie corrispondenti, nelle varie posizioni del mobile, — o che il movimento sia incompressionale — o irrotazionale.

S'intende che il criterio, a cui s'informa la definizione di un vincolo, è la riproduzione di certe circostanze caratteristiche del movimento, che, nei singoli casi, si suppongono sensibilmente verificate, indipendentemente dalle condizioni rimanenti.

Un vincolo si concepisce come imposto semplicemente alla posizione, quando, per definirlo, non occorre coordinare le posizioni assumibili dal mobile alla successione dei valori corrispondenti di un parametro, interpretabile come tempo. Tale è il vincolo della rigidità: per cui basta prescrivere che la mutua distanza di due punti corrispondenti del mobile rimanga la stessa, per ogni valore del tempo, senza preoccuparsi del modo in cui varia la posizione dei punti, al variare del tempo. In tal caso, il vincolo si dice " di prima specie „.

Naturalmente, s'introduce una tale coordinazione, ogniqualvolta si definisce il vincolo per mezzo dell'atto di movimento. Un vincolo di prima specie può anche sempre essere definito in que-

sta forma; ma, in questo caso, la coordinazione medesima non è indispensabile per la definizione del vincolo. Quando invece essa riesce indispensabile — cioè il vincolo non può essere altrimenti definito che per mezzo dell'atto di movimento — il vincolo si dice " di seconda specie ". Tale è chiaramente il caso del corpo rigido, vincolato a rotolare sopra un piano fisso *senza strisciare,* e cioè a mantenersi tangente ad un piano fisso (vincolo *fin qua* di prima specie), colla restrizione che sia nulla la velocità del punto del mobile, che, in ogni sua posizione, funge da punto di contatto. Codesto è quindi un vincolo di seconda specie.

Concetto delle forze limite
corrispondenti ad una forza motrice elementare concreta.

L'esperienza insegna a determinare, per le principali condizioni fisiche, la forza motrice elementare, quando si ponga la restrizione della mancanza del contatto: vale a dire, s'intenda che la forza motrice elementare non serva, per calcolare il sistema delle forze motrici applicate ai punti di un corpo, in presenza di altri, nella supposta condizione fisica, che colla restrizione che i corpi non vengano a mutuo contatto.

Per lo stato neutro o naturale — la condizione fisica, che si considera nella Meccanica Teorica propriamente detta — la forza motrice elementare, con questa riserva, è la forza motrice elementare newtoniana (§ 166).

Una forza motrice elementare, soggetta a codesta riserva, si chiamerà " forza motrice elementare concreta, relativa alla supposta condizione fisica ".

In conseguenza di tale riserva, il suo uso è eccessivamente circoscritto, per le esigenze del problema generale della Meccanica Teorica. E intanto essa non può servire pel calcolo della forza acceleratrice interna, e per quello del sistema delle forze

motrici interne: in quanto che una parte qualunque di un corpo aderisce pel suo contorno alla parte complementare dello stesso corpo. Se ne ricava però la definizione dei seguenti vettori, utili a considerarsi.

Supponiamo che, calcolando, per un punto P di un corpo, la forza acceleratrice, conforme ad una forza motrice elementare concreta, determinata dalla parte del corpo, che si ottiene, levandone un intorno, piccolo a piacere, del punto P, e facendo poi svanire le dimensioni dell'intorno, detta forza acceleratrice tenda ad un limite finito (funzione regolare del punto P). Chiameremo questo vettore limite " forza acceleratrice limite, conforme alla forza motrice elementare concreta ", determinata dal corpo, nel punto considerato. Non si aggiungerà altro, se puramente le dimensioni svaniscono, collo svanire del raggio di una sfera, col centro nel punto P, capace di contenere l'intorno. Diversamente, s'indicherà, con qualche opportuna qualifica, la legge particolare, con cui le dimensioni dell'intorno si suppongono svanire.

Indichiamo codesto vettore con $\mathbf{F}^*_i$, e con k, τ, al solito, la densità nei punti P del corpo considerato, e il campo da esso rappresentato, al supposto istante. Il sistema di vettori applicati, di cui punti d'applicazione sono i punti P del corpo, o del campo τ, e vettori i relativi valori di $\mathbf{F}^*_i k d\tau$, si chiamerà " sistema delle forze motrici limite interne, applicate ai punti del corpo, conformemente alla indicata forza motrice elementare concreta ".

Supponiamo ora il contorno del corpo, in parte, o totalmente, comune con quello di un altro corpo, luogo del punto P', e indichiamo con k' e τ' la densità in P', e il campo rappresentato da questo secondo corpo, all'istante considerato. Ogni punto del contorno comune sarà insieme un P ed un P'; e, secondo che si considera come P, o come P', gli va attribuita la densità rappresentata da k o da k', col significato di limite, col tendere da una parte, o dall'altra, del contorno, e va inteso $k d\tau$ o $k' d\tau'$ come ele-

mento di massa relativo al punto. Conformemente a ciò, $\mathbf{F}_i^* k' d\tau'$ dove $\mathbf{F}_i^*$ ha, per P, il precedente significato, si chiamerà la " forza motrice limite esterna, conforme alla considerata forza motrice elementare concreta ", applicata al punto P′ del secondo corpo, per effetto del primo corpo.

Finalmente, per un punto qualsivoglia, P′, del secondo corpo, indicando con $\mathbf{F}_s^*$ la $\mathbf{F}_i^*$, se P′ appartiene ad una parte del contorno comune col primo corpo, e, diversamente, la forza acceleratrice esterna $\mathbf{F}_e^*$, determinata dal primo corpo, conformemente alla forza motrice elementare concreta in discorso, il sistema dei vettori applicati, di cui punti d'applicazione sono i punti P′ del secondo corpo, e vettori i relativi valori di $\mathbf{F}_s^* k' d\tau'$, si chiamerà il " sistema delle forze motrici limite esterne ", applicate ai punti del corpo medesimo, " conformemente alla forza motrice elementare suddetta ", per effetto del primo corpo.

Si riconosce subito che esiste $\mathbf{F}_i^*$, senza riserva, per la forza motrice elementare newtoniana. Difatti, distinguendo coll'indice 1 i punti e le quantità appartenenti al corpo che si deduce dal dato, levandone un intorno di P, piccolo a piacere, si ha (§ 166)

$$\mathbf{F}_1^* = \varkappa^2 \int_{\tau_1} \operatorname{grad}_P \frac{1}{r}\, k_1\, d\tau_1 = \varkappa^2 \int_{\tau_1} \mathbf{u}\, \frac{k_1}{r^2}\, d\tau_1 ,$$

dove $\mathbf{u}$ dinota il segmento avente l'orientazione di $P_1 - P$, e grandezza 1. Quindi anche

$$\mathbf{F}_1^* = \varkappa^2 \int_{\Omega} \mathbf{u}\, d\Omega \int_{r_1} k_1\, dr , \tag{1}$$

posto (cfr. § 170)

$$d\tau_1 = r^2\, d\Omega\, dr ,$$

con che $d\Omega$ rappresenta l'elemento di superficie sferica di raggio 1 e centro P, intercettato dal cono che projetta da P l'elemento

$d\tau_1$. Ω sarà 4π per P interno, 2π per P punto ordinario del contorno. I limiti dell'integrazione rispetto a r, indicati dall'indice r_1, vanno fissati come richiede il contorno di τ_1, formato dal contorno del corpo dato e da quello dell'intorno.

Ora, il secondo membro di (1), collo svanire del raggio d'una sfera, col centro in P, capace di contenere l'intorno, ha manifestamente per limite

$$\varkappa^2 \int_\Omega \mathbf{u} \, d\Omega \int_0 k dr \, ,$$

dove i suddetti limiti sono quelli che richiede semplicemente il contorno del corpo dato. Tale sarà quindi anche il limite del primo membro. Cioè

$$\mathbf{F}_i^* = \varkappa^2 \int_\Omega \mathbf{u} \, d\Omega \int_0 k dr \, . \tag{2}$$

Questa funzione riesce finita. Si riconosce poi agevolmente, sulla stessa (2), che essa è continua. Come pure, che $\mathbf{F}_i^*$, per un punto $\overline{\mathrm{P}}$ del contorno, è il limite di $\mathbf{F}_e^*$, per un punto P′, esterno al campo τ, col tendere di P′ a $\overline{\mathrm{P}}$. Al qual proposito serve osservare che, analogamente a (1), si potrà scrivere

$$\mathbf{F}_e^* = \varkappa^2 \int_{\Omega'} \mathbf{u}' \, d\Omega' \int_{r'} k dr \, :$$

dove, indicando con P il punto generico del campo τ, Ω' rappresenta la porzione di superficie sferica, di raggio 1, e centro P′, intercettata dal cono che projetta da P′ il contorno di τ: r, la grandezza del raggio vettore P — P′: $\mathbf{u}'$, il segmento avente l'orientazione di P — P′, e grandezza 1: e finalmente i limiti dell'integrazione rispetto a r vanno stabiliti come richiede il contorno del campo τ.

Possiamo ancora dimostrare che il risultante $\mathbf{R}_i^*$, e il momento $\mathbf{M}_{io}^*$, rispetto ad un polo O qualsivoglia, del sistema delle forze motrici limite interne $\mathbf{F}_i^*\, k d\tau$, applicate ai punti del campo τ, inteso $\mathbf{F}_i^*$ dato da (2), sono nulli.

Si trova infatti, collo stesso procedimento del § 131, e valendosi ora di (2), che la potenza $\mathcal{P}_i^*$ dello stesso sistema di forze motrici, corrispondente ad un atto di movimento qualsiasi, si può rappresentare con

$$\mathcal{P}_i^* = \frac{1}{2}\varkappa^2 \int_{\tau'} k'\, d\tau' \int_{\Omega} d\Omega \int_0 k \frac{dr}{dt} dr.$$

Quindi, se l'atto di movimento è rigido, cioè si ha

$$\frac{dr}{dt} = 0\,,$$

per ogni coppia di punti corrispondenti, sarà

$$\mathcal{P}_i^* = 0\,.$$

E di qua, invocando (1) del § 106, si ricava, senz'altro,

$$\mathbf{R}_i^* = 0\,, \qquad \mathbf{M}_{io}^* = 0\,,$$

c. v. d.

Sorge la domanda, se il sistema in discorso di forze motrici limite interne non fosse, per avventura, lo stesso sistema di forze motrici interne, appartenente allo stato neutro. La risposta, fondata sul confronto di questa ipotesi coi fatti, è negativa.

Così, il componente, secondo l'asse di un cilindro, del risultante del sistema delle forze motrici della specie considerata applicate ai punti di una metà del cilindro medesimo, per effetto della metà complementare, riferendo il risultato al caso concreto di un cilindro di ferro, o d'altro metallo, non rende menomamente conto della " te-

nacità „ del cilindro, cioè dello sforzo necessario per strappare in due pezzi il cilindro medesimo [1]).

Concetto della pressione. Equazioni cardinali del calcolo del movimento dei corpi naturali. Rappresentazione di un sistema di forze motrici per mezzo di « uno sforzo » applicato ad un punto.

Il contorno del corpo considerato tocchi in alcuni punti quello di un altro, o vi aderisca, parzialmente o totalmente. Data la condizione fisica, e ammessa la conoscenza della corrispondente forza motrice elementare concreta, e l'esistenza della forza *acceleratrice* limite relativa alla medesima, determinata da un corpo, in un proprio punto qualsivoglia, potremo formare il sistema delle forze motrici limite esterne, applicate ai punti del corpo considerato, per effetto del corpo in presenza.

Ora, esso non rappresenterà, in generale, il sistema delle forze motrici esterne, applicate ai punti dello stesso primo corpo, per effetto del secondo, conformemente alla condizione fisica supposta.

Per esempio (caso importante, da rilevarsi), il corpo considerato in discorso potrà essere una parte, piccola a piacere, di un certo corpo naturale, in una data condizione fisica, e il corpo in presenza la parte complementare dello stesso corpo. Allora, il sistema delle forze motrici limite esterne, e quello delle forze motrici esterne, applicate ai punti della prima parte, per effetto della seconda, apparterranno al sistema delle forze motrici limite interne, e al sistema delle forze motrici interne, rispettivamente applicate ai punti del corpo, formato dalle due parti, e si accosteranno tanto più al sistema intero, quanto più piccola sarà la

---

1) Va ricordata, a questo proposito, la Memoria di G. Belli « Riflessioni sulla legge dell' attrazione molecolare », negli *Opuscoli Matematici e Fisici di Diversi Autori.* (Milano, 1832) tomo I, fasc. I.

prima parte. Ora, s'è veduto che codesti due ultimi sistemi riescono differenti l'uno dall'altro.

Riprendendo il caso generale, il sistema delle forze motrici esterne, applicate ai punti del corpo considerato, per effetto del corpo in presenza, nella supposta condizione fisica, si rappresenta utilmente come composto del suddetto sistema di forze motrici limite esterne, e di un sistema di forze motrici, applicate ai punti del contorno, dove si verifica il contatto o la adesione col corpo in presenza, da definirsi, nei singoli casi, conformemente, se occorre, ai vincoli imposti al movimento. Codesto si chiama il sistema delle " pressioni „, applicate ai punti del contorno del corpo considerato, per effetto del corpo ad esso appoggiato, o aderente, nelle supposte circostanze. Quando si verifica adesione per pezzi continui del contorno, indicandone il complesso con σ, il sistema delle pressioni in discorso, o, più generalmente, un sistema parziale, si rappresenta come un sistema di vettori applicati, di cui punti d'applicazione sono i punti di σ, e vettori i corrispondenti valori di certe forze motrici $\mathbf{p}^* d\sigma$. Allora, $\mathbf{p}^*$ si chiama la " pressione specifica „ relativa al punto generico di σ, e a certe circostanze, da indicarsi a seconda del caso.

Per definire le pressioni, ci si riserba di assumere le forme più convenienti al caso, introducendo anche, se occorre, la dipendenza dall'atto di movimento, e dal tempo.

È importante rilevare che, con simili ipotesi sulle pressioni relative ai singoli casi, va inteso che si ripari, negli stessi casi, ad alterazioni del fatto concreto, introdotte dai vincoli, o da altre semplificazioni del problema. Per esempio, le " pressioni di attrito „ di un corpo rigido, mobile a contatto di un altro, e le " pressioni di resistenza del mezzo „ di un corpo rigido, mobile in seno all'aria, si assumono come dipendenti dall'atto di movimento. Ma, d'altra parte, il fenomeno dell'attrito è subordinato, di fatto, ad una deformazione dei mobili a mutuo contatto, che si esclude

col vincolo della rigidità: e il fenomeno della resistenza dell'aria al movimento di un corpo immerso va effettivamente associato con un movimento dell'aria, che si trascura.

In generale, si definiranno il risultante $\mathbf{R}^*_\sigma$ e il momento $\mathbf{M}^*_{\sigma,O}$ del suddetto sistema di pressioni, applicate ai punti della superficie σ, (cfr. § 65) con

$$(1) \qquad \mathbf{R}^*_\sigma = \int_\sigma \mathbf{p}^* d\sigma , \qquad \mathbf{M}^*_{\sigma,O} = \int_\sigma (P - O) \wedge d\sigma .$$

In alcuni casi, questi vettori si assegneranno *a priori*.

Tutto ciò premesso, le equazioni cardinali, per un corpo naturale qualunque, o per una sua parte comunque piccola (cfr. § 23), si potranno porre sotto la forma

$$\int_\tau \mathbf{A}\, k d\tau = \int_\tau \mathbf{F}_\varepsilon\, k d\tau + \mathbf{R}_\sigma$$

$$\int_\tau (P - O) \wedge \mathbf{A}\, k d\tau = \int_\tau (P - O) \wedge \mathbf{F}_\varepsilon\, k d\tau + \mathbf{M}_{\sigma,O} ,$$

dove $\mathbf{F}_\varepsilon\, k d\tau$ indica la forza motrice limite esterna, applicata al punto P, formata con tutti i corpi in presenza (a contatto o no), e $\mathbf{R}_\sigma$, $\mathbf{M}_{\sigma,O}$ indicano il risultante e il momento, rispetto ad O, del sistema totale delle pressioni applicate ai punti del corpo.

Queste sono le " equazioni cardinali „ del calcolo del movimento dei corpi naturali.

Supposta $\mathbf{p}^*$ costante per tutti i punti della superficie σ (pressione " uniformemente distribuita „ o " uniforme „) si ha da (1)

$$\mathbf{R}^*_\sigma = \mathbf{p}^* \sigma , \qquad \mathbf{M}^*_{\sigma,O} = (\overline{P} - O) \wedge \mathbf{R}^*_\sigma ,$$

dove il punto $\overline{P}_\sigma$ è definito per mezzo di

$$P_\sigma - O = \frac{\int_\sigma (P - O)\, d\sigma}{\sigma}$$

e dell'origine O, dalla quale risulta indipendente.

$\overline{P}_\sigma$ si chiamerà il " punto medio „ della superficie σ (cfr. § 18). E si dice che il risultante $\mathbf{R}^*_\sigma$ è " applicato „ a questo punto (cfr. § 115).

La potenza $\mathcal{P}^*_\sigma$, corrispondente ad un atto di movimento, per cui $\mathbf{V}$ è la velocità dal punto generico di σ, e il lavoro L^*_σ, corrispondente ad un movimento della stessa superficie, nell'intervallo di tempo $(t_0 t_1)$, del sistema delle pressioni $\mathbf{p}^* d\sigma$, applicate ai punti della superficie σ, si definiscono (cfr. § 102 e § 104) con

$$\mathcal{P}^*_\sigma = \int \mathbf{V} \times \mathbf{p}^* d\sigma, \qquad L^*_\sigma = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{P}^*_\sigma dt.$$

Sia la superficie σ invariabile. Allora, nella suddetta ipotesi che $\mathbf{p}^*$ sia costante per tutti i punti di essa (in molti casi potrà servire un valor medio), si ha

$$\mathcal{P}^*_\sigma = \int_\sigma \mathbf{V}\, d\sigma \times \mathbf{p}^* = \overline{\mathbf{V}}_\sigma \times \mathbf{R}^*_\sigma,$$

indicando con $\overline{\mathbf{V}}_\sigma$ la velocità del punto $\overline{P}_\sigma$. E, supposto $\mathbf{p}^*$ invariabile anche col tempo t (potrà ancora servire un valor medio),

$$L^*_\sigma = (\overline{P}_{\sigma,1} - \overline{P}_{\sigma,0}) \times \mathbf{R}^*_\sigma,$$

indicando con $\overline{P}_{\sigma,0}$, $\overline{P}_{\sigma,1}$ il posto di $\overline{P}_\sigma$ ai tempi t_0 e t_1. (cfr. § 115).

Così, un siffatto sistema di pressioni, o di forze motrici, comparisce, nei teoremi generali della Dinamica, per mezzo del proprio risultante, concepito come applicato al punto medio della superficie, luogo dei punti d'applicazione delle singole pressioni componenti il sistema. Con questo significato si rappresenta, in molti casi, un sistema di forze motrici, per mezzo di una forza motrice, di una pressione, o di " uno sforzo „, " applicato ad un punto „.

II.

Nozioni di Calcolo Vettoriale [1]).

Calcolo delle quantità scalari. Dimensioni delle unità derivate.

Ad ogni quantità ordinaria, o " scalare „, di una specie qualsivoglia, fissata l'" unità di misura „, compete una certa " misura „, per mezzo della quale la quantità s'introduce nei calcoli. La misura di una quantità è un numero reale, che potrà anche essere nullo, o negativo, con un significato proprio delle varie specie di quantità. Esso dipende dall'unità con questa regola, che se m ed m' indicano le misure di una stessa quantità, rispetto a due unità diverse, ed m'_1, la misura della prima unità, rispetto alla seconda, si ha

$$m' = m'_1 m. \tag{1}$$

La quantità la cui misura è m, rispetto all'unità indicata con $[m]$, si rappresenta con $m[m]$.

Il valore assoluto, o " grandezza „, corrispondente ad m, s'indicherà, di regola, con $|m|$.

La somma delle misure, rispetto alla stessa unità, di più quantità della stessa specie rappresenta, per principio, la misura di una quantità della stessa specie — " somma „ delle corrispondenti quantità — che ha un particolare significato, a seconda della specie di quantità, col quale si connette quello della misura.

Intese poi $a, b, c\dots$ misure di quantità *di diversa specie*, rispetto alle unità $[a], [b], [c]\dots$,

$$C a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots$$

---

[1]) Per una trattazione completa, raccomandiamo i pregevolissimi *Elementi di Calcolo vettoriale con numerose applicazioni* di C. Burali Forti e R. Marcolongo (Bologna, Zanichelli, 1909). V. anche l'edizione francese con supplemento, traduzione di S. Lattes, *Eléments de Calcul Vectoriel, etc.* (Paris, Hermann, 1910).

dove $C, \alpha, \beta, \gamma \ldots$ dinotano numeri reali, si assume, per definizione, come misura di una " quantità derivata „, appartenente ad una " unità derivata „, che si dice avere " dimensioni „ $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, rispetto ad $[a], [b], [c] \ldots$ ordinatamente, e si rappresenta con $[a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma \ldots]$. Se invece più fattori appartengono alla stessa unità, il numero delle dimensioni rispetto a queste unità s'intende rappresentato dalla somma degli esponenti dei fattori medesimi.

Segue da (1) che la misura della suddetta quantità derivata dipende dalle unità delle singole specie con questa regola, che, se m ed m' indicano le sue misure relative ad $[a], [b], [c] \ldots$ e a $[a'], [b'], [c'] \ldots$ rispettivamente, e $a'_1\, b'_1\, c'_1 \ldots$ le misure delle prime rispetto alle seconde, specie per specie, si ha

$$m' = a'^{\alpha}_1\, b'^{\beta}_1\, c'^{\gamma}_1 \ldots m.$$

Ogni relazione fra quantità dovendo essere indipendente dalla scelta delle unità di misura, se φ è formata con misure di quantità, e si compone di più termini, l'equazione $\varphi = 0$ richiede che i varii termini abbiano le stesse dimensioni (siano " omogenei „) rispetto ad ogni unità.

Per la stessa ragione, i simboli relativi ad una formola esprimente tale relazione si riferiscono spesso indifferentemente alle misure delle quantità e alle quantità medesime.

Vettore. Relativi concetti fondamentali.

Direzione e senso definiscono collettivamente un'*orientazione*.

Vettore è ogni combinazione collettivamente definita da una quantità, di qualsivoglia specie, e da una orientazione.

Vettore tipico è il " *segmento orientato* „: segmento rettilineo, il cui valore s'intende collettivamente definito dalla sua lunghezza e dalla sua orientazione.

Segmento rappresentativo di un vettore di specie qualsivoglia

chiamiamo il segmento orientato, avente l'orientazione del vettore, e, rappresentando l'unità della quantità del vettore con una certa lunghezza, grandezza proporzionale a quella del vettore.

I vettori s'indicheranno colle lettere in grassetto $\mathbf{A}, \mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}$.... Allora $|\mathbf{A}|, |\mathbf{a}|, |\boldsymbol{\alpha}|$... oppure A, a, α... rappresenteranno la grandezza dei vettori medesimi.

In particolare,

$$P_2 - P_1$$

rappresenta il segmento orientato, definito per mezzo dei punti P_1 e P_2, *) colla convenzione che il senso volga da P_1 a P_2, (non atto, reciprocamente, per sè stesso, a definire i due punti P_1 e P_2) [1].

Alla misura nulla della relativa quantità s'intende corrispondere un vettore *nullo,* del quale l'orientazione è indeterminata.

Il vettore nullo ha per segmento rappresentativo un segmento i cui estremi coincidono. Esso viene indicato, come la sua grandezza, con 0. Si ha così, indicando con P un punto, $P - P = 0$.

Il componente secondo una direzione (o secondo una retta) di un vettore, il cui segmento rappresentativo è $P_2 - P_1$, è il vettore il cui segmento rappresentativo è $p_2 - p_1$, dinotando con p_1, p_2 le projezioni ortogonali di P_1, P_2, sulla retta indicata.

La componente di un vettore secondo un'orientazione (o secondo un asse) è la misura del componente secondo la direzione appartenente all'orientazione indicata, col segno + o col segno —, secondo che il senso di questa concorda o no con quello del vettore. Vale a dire, indicando con α l'angolo formato dall'orientazione di un vettore $\mathbf{A}$ con un certo asse, la componente di $\mathbf{A}$ secondo l'asse è

$$A \cos \alpha .$$

[1]) È importante notare che la differenza $P_2 - P_1$ non assegna il posto di P_1 e P_2 nello spazio, come la differenza $b - a$ di due numeri, atta a individuare uno scalare, non assegna il posto di a e b nella scala dei numeri.

*) con questo che la grandezza e la direzione sono quelle del segmento rettilineo $P_1 P_2$, e

Componente secondo un piano di un vettore, il cui segmento rappresentativo è $P_2 - P_1$, è il vettore, il cui segmento rappresentativo è $p_2 - p_1$, dinotando ora con p_1, p_2 le projezioni ortogonali di P_1, P_2 sul piano indicato.

Assunta una terna d'assi cartesiani ortogonali, si chiamano *componenti*, X, Y, Z, di un vettore le sue componenti secondo gli assi x, y, z. Indicando con $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ i coseni di direzione del vettore **A**, si hanno le formole

$$X = A\cos\alpha \qquad Y = A\cos\beta \qquad Z = A\cos\gamma$$

$$A = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \qquad \cos\alpha = \frac{X}{A}, \quad \cos\beta = \frac{Y}{A}, \quad \cos\gamma = \frac{Z}{A}.$$

La componente secondo un'orientazione (o asse), i cui coseni di direzione sono $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\gamma$, risulta

$$X\cos\lambda + Y\cos\mu + Z\cos\gamma.$$

Operazioni elementari sui vettori.

Somma di due vettori omogenei (sommandi) **A**, **B**,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B}$$

è il vettore il cui segmento rappresentativo è $P_2 - P_1$, dove P_2 è dedotto da P_1, descrivendo, con P_1 come origine, un segmento rettilineo avente la grandezza e l'orientazione del segmento rappresentativo di **A**, e, col termine di esso, come nuova origine, un segmento rettilineo avente la grandezza e l'orientazione del segmento rappresentativo di **B**.

Si verificano le relazioni

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{C},$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}).$$

E, indicando P_1, P_2, P_3 tre punti

$$(P_3 - P_2) + (P_2 - P_1) = P_3 - P_1. \tag{1}$$

Il componente, o la componente, della somma di più vettori secondo una direzione, o una orientazione, è la somma dei componenti, o delle componenti, omologhe dei sommandi.

Differenza fra il vettore **B** *e il vettore* **A**

$$\mathbf{B}-\mathbf{A}$$

è il vettore **C** tale che si ha

$$\mathbf{B}=\mathbf{A}+\mathbf{C}.$$

Prodotto di un numero a per un vettore **A**, *o di un vettore* **A** *per un numero a (fattori)*

$$a\mathbf{A}=\mathbf{A}a \tag{1}$$

è il vettore avente grandezza eguale al prodotto delle grandezze del numero e del vettore, e, supposto a ed **A** diversi da zero, la stessa direzione del vettore, e lo stesso senso o l'opposto, secondo che a è positivo o negativo.

Si verificano, oltre (1), le relazioni

$$a_1(a_2\mathbf{A})=a_1(\mathbf{A}\,a_2)=a_1a_2\mathbf{A},$$

$$(a_1+a_2)\mathbf{A}=a_1\mathbf{A}+a_2\mathbf{A}\;,\qquad a(\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2)=a\mathbf{A}_1+a\mathbf{A}_2.$$

Inoltre, si riconduce la differenza alla somma, ponendo, per definizione,

$$-\mathbf{A}=(-1)\mathbf{A}.$$

Si ha così, indicando P_1, P_2, due punti,

$$P_1-P_2=-(P_2-P_1).$$

Il *prodotto di uno scalare per un vettore, o viceversa,* si riconduce al precedente, concependo a come misura dello scalare.

Prodotto scalare di un vettore $\mathbf{A}_1$ *per un vettore* $\mathbf{A}_2$, *o di un vettore* $\mathbf{A}_2$ *per un vettore* $\mathbf{A}_1$ *(fattori)*

$$\mathbf{A}_1\times\mathbf{A}_2=\mathbf{A}_2\times\mathbf{A}_1 \tag{2}$$

è la quantità la cui misura è nulla, se un vettore è nullo, e diversamente, rappresentata da

$$A_1 A_2 \cos \widehat{\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2},$$

indicando con $\widehat{\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2}$ l'angolo formato dalle orientazioni.

Si verificano, oltre (2), le relazioni

$$\mathbf{A}_1 \times (\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3) = \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_3, \quad a\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 \times a\mathbf{A}_2 = a(\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2).$$
$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{A}^2 = A^2.$$

Infine, indicando con X_i, Y_i, Z_i le componenti di $\mathbf{A}_i$ $(i = 1, 2)$, il prodotto scalare riesce rappresentato da

$$X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2.$$

Prodotto vettore di un vettore $\mathbf{A}_1$ *per un vettore* $\mathbf{A}_2$

$$\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2$$

è il vettore nullo, se un vettore è nullo, e diversamente, avente grandezza rappresentata da

$$A_1 A_2 \sin \widehat{\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2},$$

e, salvo il caso che i due vettori siano paralleli, — nel quale detta grandezza riesce nulla, e al prodotto si attribuisce il valore nullo — la direzione perpendicolare al piano delle direzioni dei due vettori, e senso positivo rispetto al giro che conduce, per l'angolo minore di due retti, dall'orientazione di $\mathbf{A}_1$ a quella di $\mathbf{A}_2$.

Si verificano le relazioni

$$\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2 = -(\mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_1) \qquad \mathbf{A}_1 \wedge (\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3) = \mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_3$$
$$a\,\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 \wedge a\,\mathbf{A}_2 = a(\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2)$$
$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{A} = 0.$$

Infine, indicando le componenti dei due vettori come precedentemente, le componenti di

$$\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2$$

risultano espresse dai minori della matrice

$$\begin{Vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{Vmatrix}.$$

Prodotto trivettore dei tre vettori $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2$$

è il prodotto misto

$$\mathbf{A}_1 \times (\mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_3) = \mathbf{A}_2 \times (\mathbf{A}_3 \wedge \mathbf{A}_1) = \mathbf{A}_3 \times (\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2).$$

Operazioni infinitesimali sui vettori.

I concetti attinenti a limite si estendono immediatamente ad un vettore funzione di una o più variabili (scalari).

Supposto il vettore $\mathbf{A}$ funzione del parametro t, si definisce la *derivata*

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}$$

di $\mathbf{A}$ *per rispetto a* t, per mezzo di

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \lim_{\mathrm{D}t=0} \frac{\mathrm{D}\mathbf{A}}{\mathrm{D}t},$$

indicando con $\mathbf{A}$ e con $\mathbf{A} + \mathrm{D}\mathbf{A}$ i valori del vettore pei valori t e $t + \mathrm{D}t$ del parametro.

Le componenti di $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ risultano

$$\frac{dX}{dt}, \quad \frac{dY}{dt}, \quad \frac{dZ}{dt}.$$

Inoltre si verificano le relazioni

$$\frac{d\Sigma \mathbf{A}}{dt} = \sum \frac{d\mathbf{A}}{dt},$$

$$\frac{d(\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2)}{dt} = \frac{d(\mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_1)}{dt} = \frac{d\mathbf{A}_1}{dt} \times \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_1 \times \frac{d\mathbf{A}_2}{dt}$$

$$\frac{d(\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2)}{dt} = -\frac{d(\mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_1)}{dt} = \frac{d\mathbf{A}_1}{dt} \wedge \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_1 \wedge \frac{d\mathbf{A}_2}{dt}.$$

E supposto anche il numero a funzione di t,

$$\frac{da\mathbf{A}}{dt} = \frac{d\mathbf{A}a}{dt} = \frac{da}{dt}\mathbf{A} + a\frac{d\mathbf{A}}{dt}.$$

L'integrale definito

$$\int_\alpha^\beta \mathbf{A}\, dt$$

del vettore $\mathbf{A}$, *nell'intervallo* $(\alpha\beta)$ *del parametro* t, si definisce per mezzo di

$$\int_\alpha^\beta \mathbf{A}\, dt = \lim_{\mathrm{D}t=0} \sum \overline{\mathbf{A}}\, \mathrm{D}t,$$

dove, concepito l'intervallo $(\alpha\beta)$ decomposto in tanti intervalli parziali $(t, t+\mathrm{D}t)$, $\overline{\mathbf{A}}$ rappresenta il valore di $\mathbf{A}$ in un punto dell'intervallo parziale generico, e la somma è estesa a tutti gl'intervalli parziali.

Le componenti di detto integrale risultano

$$\int_\alpha^\beta X\, dt, \qquad \int_\alpha^\beta Y\, dt, \qquad \int_\alpha^\beta Z\, dt.$$

Allo stesso modo, supposto $\mathbf{A}$ funzione del posto di un campo superficiale o corporeo, si definisce l'integrale di $\mathbf{A}$ esteso al campo medesimo.

Si estendono poi, senz'altro, a questi integrali, in pari condizioni, le proprietà generali dell'ordinario integrale definito scalare.

Definizione della posizione di un punto per mezzo di un vettore e di un'origine.

Il vettore $P-O$ e il punto O definiscono insieme il punto P, con questo che P sarà il termine di un segmento, descritto da O, come origine, colla grandezza, la direzione, e nel senso di $P-O$. Diremo che P è " definito per mezzo di $P-O$ e dell''origine O ", oppure " con $P-O$, riferito all'origine O " [1]).

Vettore applicato o localizzato. Momento di un vettore applicato rispetto ad un polo, e rispetto ad una retta.

Vettore applicato o localizzato è la combinazione collettivamente definita da un vettore e da un punto " *punto d'applicazione del vettore* ". La retta parallela al vettore, passante pel punto d'applicazione, si chiama *retta d'applicazione del vettore*.

Momento di un vettore applicato, rispetto ad un polo, indicando con P e $\mathbf{A}$ il punto d'applicazione e il vettore, con O e $\mathbf{M}_O$ il polo e il momento rispetto a O, è il prodotto vettore

$$\mathbf{M}_O = (P-O) \wedge \mathbf{A}.$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè il momento di un vettore, non nullo, sia nullo, risulta che il polo appartenga alla retta d'applicazione. Quindi questa proprietà definisce la retta d'applicazione.

Per due poli differenti O, O', si ha

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O + (O-O') \wedge \mathbf{A}. \tag{4}$$

---

[1]) Coll'algoritmo di BURALI FORTI e MARCOLONGO *(Op. cit.)*

$$P = O + (P-O).$$

Per cui condizione necessaria e sufficiente perchè il momento non muti è che il polo si sposti parallelamente al vettore.

Indicando con X, Y, Z le componenti di $\mathbf{A}$, con x, y, z le coordinate di P, con a, b, c quelle di O, le componenti di M_0 riescono

$$(5) \quad (y-b)Z-(z-c)Y, \quad (z-c)X-(x-a)Z, \quad (x-a)Y-(y-b)X.$$

Momento di un vettore applicato rispetto ad una retta è il prodotto vettore dei due fattori

1) segmento orientato perpendicolare alla retta indicata e alla retta d'applicazione del vettore, col senso che volge da quella a questa;

2) componente del vettore secondo un piano perpendicolare alla retta indicata.

Apparisce dalla (5) che esso coincide col componente, secondo la retta indicata, del momento del vettore, rispetto ad *un punto qualunque* di essa, come polo.

Sistema di vettori applicati.

Sistema di vettori applicati si chiama un insieme di vettori omogenei, $\mathbf{A}_i \, (i=1, 2 \ldots n)$, applicati ad altrettanti punti, P_i.

Risultante, $\mathbf{R}$, *del sistema* si chiama la somma dei vettori, e *momento,* $\mathbf{M}_0$, *del sistema, rispetto al polo* O, la somma dei momenti degli stessi vettori applicati ai punti P_i, rispetto al polo O.

Cioè

$$\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{A}_i, \qquad \mathbf{M}_0 = \sum_i (P_i - O) \wedge \mathbf{A}_i.$$

Per (4), si ha

$$(6) \qquad \mathbf{M}_{0'} = \mathbf{M}_0 + (O - O') \wedge \mathbf{R}.$$

Ne risulta che condizione necessaria e sufficiente perchè il momento sia invariabile col polo è che sia

$$\mathbf{R} = 0.$$

Supposto

$$\mathbf{R} \neq 0,$$

condizione necessaria e sufficiente perchè il momento non cambii col polo riesce che il polo si sposti parallelamente a $\mathbf{R}$.

Quando esiste, per un polo O, un punto $\overline{P}$, per cui

$$\mathbf{M}_0 = \sum_i (P_i - O) \wedge \mathbf{A}_i = (\overline{P} - O) \wedge \mathbf{R}, \tag{7}$$

lo stesso punto, per (6) e (1), possiede eguale proprietà per ogni altro polo.

Collocando il polo in $\overline{P}$, e quindi in un punto qualunque della parallela a $\mathbf{R}$, passante per esso, per (7), il momento riesce nullo. Reciprocamente, se esiste un punto $\overline{P}$, e quindi una retta parallela a $\mathbf{R}$, dove collocando il polo, il momento riesce nullo, segue da (6) che, per un polo O qualsivoglia, si verificherà (7).

Tale punto $\overline{P}$ si chiama *punto d'applicazione del risultante,* e la retta, parallela allo stesso risultante, passante per esso, *retta d'applicazione del risultante*. Ogni punto della retta d'applicazione conta egualmente per punto d'applicazione.

Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza della retta d'applicazione del risultante riesce, per (7), che il momento, rispetto ad un polo, se non è nullo, sia perpendicolare al risultante.

Nel caso che le rette d'applicazione concorrano in un punto, questo riesce punto d'applicazione del risultante.

Nel caso che i vettori siano paralleli (supposto sempre il risultante non nullo), punto d'applicazione del risultante si trova essere il punto $\overline{P}$ definito per mezzo di

$$\overline{P} - O = \frac{\sum_i (P_i - O)(\mathbf{A}_i)}{\sum_i (\mathbf{A}_i)},$$

e dell'origine O qualsivoglia, indicando $(\mathbf{A}_i)$ la *misura* del vettore $\mathbf{A}_i$, da assumersi positiva pei vettori aventi un senso a piacere, e negativa pei vettori aventi il senso opposto.

Si riconosce subito che $\overline{P}$ risulta indipendente da O. Poichè, indicando, per un momento, con $\overline{P}'$ il punto corrispondente, secondo la stessa formola, all'origine O′, si ha

$$(\overline{P}'-\overline{P})+(O'-O)=\frac{\sum_i (O'-O)(\mathbf{A}_i)}{\sum_i (\mathbf{A}_i)}=O'-O\,,$$

e per conseguenza

$$\overline{P}'-\overline{P}=0.$$

Il punto $\overline{P}$ non cambia, cambiando la direzione comune dei vettori, a parità delle rimanenti circostanze, e si chiama il *centro dei vettori paralleli.*

Il componente di $\mathbf{M}_0$, secondo una retta, si chiama pure *momento del sistema dei vettori applicati, rispetto alla retta.* Esso riesce il risultante dei momenti, rispetto alla retta, dei vettori appartenenti al sistema.

Inteso $\mathbf{A}$ funzione del punto P di un campo τ, questi risultati si estendono immediatamente al caso del sistema di vettori $\mathbf{A}d\tau$, applicati ai punti dello stesso campo, ponendo

$$\mathbf{R}=\int_\tau \mathbf{A}\,d\tau\,,\qquad \mathbf{M}_0=\int_\tau (P-O)\wedge\mathbf{A}\,d\tau\,,$$

III.

Nozioni di Cinematica.

Spostamento relativo al passaggio di un punto da una posizione iniziale P *ad una posizione finale* P′ è il vettore P′—P.

Posizione di un sistema è l'insieme delle posizioni di tutti i suoi punti. Per due diverse posizioni di uno stesso sistema, sono intese due figure, i cui punti, di regola, si corrispondono biunivocamente; e due punti corrispondenti si concepiscono come posizioni diverse di uno stesso punto del sistema.

Eccezione alla corrispondenza biunivoca faranno i punti di contatto di due parti del sistema, suscettibili di staccarsi, l'una dall'altra.

Movimento di un punto, o di un sistema, in un intervallo di tempo, è una successione generalmente regolare di posizioni del punto, o del sistema, coordinata alla successione dei valori di un parametro "il tempo„, nell'indicato intervallo.

Colla parola "regolare„, si accenna, in generale, brevemente alla continuità, derivabilità ecc. delle funzioni, a cui si riferisce il discorso.

Movimento regolare di un sistema si chiama, in generale, il movimento, per cui, la posizione al tempo t_0 essendo rappresentata da una figura continua, le coordinate, x, y, z, del punto generico al tempo t sono funzioni regolari del tempo t e delle coordinate dello stesso punto al tempo t_0. Alla parte della posizione al tempo t_0, *racchiusa* da una superficie, corrisponde la parte della posizione al tempo t, *racchiusa* dalla superficie corrispondente: e dette parti delle due posizioni si considerano come *la stessa parte* del sistema, nelle sue posizioni ai tempi t_0 e t.

Indicando P la posizione del punto mobile al tempo generico t, e O un punto (origine) invariabile, si definiscono la *velocità* $\mathbf{V}$, e l'*accelerazione* $\mathbf{A}$, del punto, *al tempo t,* con

$$\mathbf{V} = \frac{d(\mathrm{P}-\mathrm{O})}{dt}, \qquad \mathbf{A} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d^2(\mathrm{P}-\mathrm{O})}{dt^2}.$$

Ciò val quanto dire che, indicando con P' il posto del punto mobile al tempo $t+\mathrm{D}t$, si ha, per lo sviluppo di Taylor, fino al termine di 2.° ordine rispetto a $\mathrm{D}t$, incluso,

$$\mathrm{P}' - \mathrm{P} = \mathbf{V}\mathrm{D}t + \frac{1}{2}\mathbf{A}\,\mathrm{D}t^2.$$

(spostamento del punto nell'intervallo $(t, t+\mathrm{D}t)$).

Supposto $\mathbf{V}$ costante rispetto al tempo t, con che $\mathbf{A}=0$, si ha, indicando con P_0 il posto del punto P ad un tempo fisso, t_0,

$$P - P_0 = \mathbf{V}(t - t_0).$$

Donde scaturisce, per la definizione del prodotto di un vettore per un numero, che la *trajettoria* del punto sarà una retta, avente la direzione di $\mathbf{V}$, e il senso dello spostamento sarà quello della stessa $\mathbf{V}$. La quantità della velocità risulta senz'altro serbare la grandezza costante V. Il movimento è *rettilineo, uniforme.*

Supposto $\mathbf{A}$ costante rispetto al tempo t, si ha, indicando con $\mathbf{V}_0$ il valore di $\mathbf{V}$ al tempo t_0,

$$P - P_0 = \mathbf{V}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\mathbf{A}(t - t_0)^2,$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{A}(t - t_0).$$

Se $\mathbf{V}_0 = 0$, la trajettoria risulta appartenente ad una retta, avente la direzione di $\mathbf{A}$, e il senso dello spostamento risulta opposto a quello di $\mathbf{A}$ o lo stesso, secondo che è $t - t_0 < 0$ o $t - t_0 > 0$. Il movimento si dice *rettilineo uniformemente accelerato* (e, nella prima fase, anche più particolarmente), *uniformemente ritardato.*

Se $\mathbf{V}_0$ è paralella ad $\mathbf{A}$, si riconduce il caso al precedente, sostituendo al tempo t_0 il tempo t'_0 per cui a $\mathbf{V}$ compete il valore 0, conformemente all'equazione

$$0 = V_0 + A(t'_0 - t_0).$$

Diversamente, assumendo una coppia d'assi x, y, coll'origine in P_0, e colle orientazioni di $\mathbf{V}_0$ e di $\mathbf{A}$, rispettivamente, la trajettoria del punto risulta la parabola la cui equazione è

$$y = \frac{1}{2}\frac{A}{V_0^2}x^2.$$

Il movimento del punto si dice *parabolico.*

Atto di movimento di un sistema, al tempo t, chiamiamo l'insieme delle velocità di tutti i punti, considerate in relazione colla posizione degli stessi punti al tempo t.

Spostamento elementare di un sistema, al tempo t, chiamiamo l'insieme degli *spostamenti elementari* $\mathbf{V}\,\mathrm{D}t$ di tutti i punti, nell'intervallo $(t, t+\mathrm{D}t)$, considerati in relazione colla posizione degli stessi punti al tempo t.

Atto di movimento traslatorio è quello per cui $\mathbf{V}$ è lo stesso per tutti i punti, " *velocità dell'atto di movimento traslatorio* ".

Atto di movimento rotatorio è quello per cui, indicando con ω, "*velocità angolare*", un vettore invariabile rispetto ai punti, e con O un punto parimente invariabile, si ha, pel punto generico P,

$$\mathbf{V} = \omega \wedge (P - O).$$

La retta parallela a ω, passante per O, è l' "*asse dell'atto di movimento rotatorio*".

Atto di movimento composto di due o più altri, è in generale, un atto di movimento, per cui la velocità di ogni punto è la somma delle velocità, che competono al punto, nei singoli atti di movimento indicati.

È *proprietà caratteristica*

del movimento traslatorio, che l'atto di movimento, ad ogni istante, è traslatorio — donde segue che a tutti i punti del sistema competono trajettorie eguali e parallele, e la stessa legge del movimento sulla trajettoria (*trajettoria,* e *legge del movimento sulla trajettoria,* del movimento traslatorio) — :

del movimento rotatorio, che l'atto di movimento, ad ogni istante, è un atto di movimento rotatorio, con asse invariabile rispetto al tempo — con che questo asse, e la velocità angolare dell'atto di movimento rotatorio competente ad un istante, si chiamano l'*asse* e la *velocità angolare,* del movimento rotatorio, allo stesso istante — :

del movimento rigido, che l'atto di movimento, ad ogni istante, è composto di un atto di movimento traslatorio, la cui velocità è la velocità $\mathbf{V}_O$ di un punto qualunque O del mobile, e di un atto di movimento rotatorio, il cui asse passa per O, e la velocità angolare è indipendente da O; vale a dire, per un punto qualunque P,

$$\mathbf{V}_P = \mathbf{V}_O + \omega \wedge (P - O).$$

Ne segue che lo spostamento del punto generico P, nello *spostamento elementare rigido* di un sistema, si potrà rappresentare con un'espressione della forma

$$\delta \mathbf{s}_O + \delta \varphi \wedge (P - O),$$

dove $\delta \mathbf{s}_O$ dinota lo spostamento di un punto fissato, O, e $\delta \varphi$ un vettore invariabile rispetto ai punti, indipendente dal punto O, " rotazione „ del considerato spostamento.

Movimento di un punto relativo ad una terna d'assi mobili, considerati come fissi, in una certa posizione, è il movimento di un punto, avente, ad ogni istante, rispetto ad una terna d'assi fissi, nella indicata posizione, la stessa posizione come il punto mobile, rispetto agli assi mobili, nella loro posizione al considerato istante. Il movimento del punto rispetto agli assi, a cui si riferisce il movimento degli assi mobili, si chiama *movimento assoluto.*

Indicando con $\mathbf{V}$ e $\mathbf{A}$, $\mathbf{V}_R$ e $\mathbf{A}_R$, $\mathbf{V}_S$ e $\mathbf{A}_S$ la velocità e l'accelerazione, rispettivamente, nel movimento assoluto, nel movimento relativo agli assi mobili, considerati come fissi nella posizione (o semplicemente coll'orientazione) degli assi mobili, al considerato istante, e nel movimento del punto invariabilmente unito agli assi mobili, in cui cade il punto in discorso allo stesso istante, " *movimento di trascinamento, appartenente al considerato istante* „, si ha

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_S$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_R + \mathbf{A}_S - 2\,\mathbf{V}_R \wedge \omega\,,$$

dove ω indica la velocità angolare degli assi mobili.

Il vettore $2\mathbf{V}_R \wedge \omega$ si chiama *accelerazione centrifuga composta.* La seconda relazione costituisce il “teorema di Coriolis„.

Se il movimento degli assi è traslatorio, si ha $\omega = 0$, quindi

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_R + \mathbf{A}_S ,$$

e $\mathbf{V}_S$, $\mathbf{A}_S$ rappresentano la velocità e l'accelerazione di un punto *qualunque* invariabilmente unito agli assi mobili.

Se inoltre il movimento è rettilineo uniforme, allora

$$\mathbf{V}_S = 0 , \qquad \mathbf{A} = \mathbf{A}_R :$$

cioè l'accelerazione nel movimento relativo riesce la stessa come nel movimento assoluto.

Se il movimento degli assi è rotatorio *uniforme,* cioè si ha

$$\mathbf{V}_S = \omega \wedge (P - O)$$

con O e ω costanti rispetto al tempo t, si ha ancora, inteso P invariabilmente unito agli assi mobili,

$$\mathbf{A}_S = \omega \wedge \frac{d(P-O)}{dt} = \omega \wedge \mathbf{V}_S .$$

Il vettore $-\mathbf{A}_S = \mathbf{V}_S \wedge \omega$ si chiama l'*accelerazione centrifuga.*

APPUNTI

Pag. 3, §§ 1-3. — Sui concetti del tempo e della posizione, vedasi pure l'ampia e interessante discussione, che se ne trova nel Cap. V dei *Problemi della Scienza* di F. ENRIQUES (Bologna, Zanichelli, 1906).

Pag. 15, § 18. — Per l'indipendenza di $\overline{P}$ da O, e per le analoghe proprietà di $\overline{P}$ a pag. 18 e a pag. 30, e di $\overline{P}_\sigma$ a pag. 199, v. pag. 212 (Centro dei Vettori Paralleli).

Pag. 22, § 30. — " Postulati „, sotto l'aspetto della trattazione matematica, ci riserbiamo di discuterli come, più propriamente, " ipotesi „, nel confronto colla Fisica.

Notiamo la grande generalità che il primo postulato conferisce all'immagine del corpo naturale. Potremo, quando vogliamo, conformarci al concetto molecolare, e considerarlo come un aggregato discreto di parti continue, comunque piccole, per passare poi, ove ci piaccia, all'immagine più comune di un aggregato di punti materiali. L'eventuale utilità di ridursi ad elementi pur sempre finiti e continui è stata posta in evidenza dalla teoria degli elettroni.

Pag. 50, § 60. — È ben chiaro che nulla è l'accelerazione e la forza motrice del movimento relativo agli assi, invariabilmente uniti al globo terrestre, rispetto ai quali è precedentemente definito il movimento per gravità.

Pagg. 77 e segg. §§ 79 e segg. — Per denominare i teoremi generali della Dinamica ho adottato i termini della *Mechanik* di Kirchhoff, aggiungendovi quello di " teorema del momento delle forze

motrici effettive „, che è necessario distinguere da quello " del momento delle quantità di moto „, quando il polo del momento è un qualsivoglia punto mobile, e, per simmetria, l'altro del " risultante delle forze motrici effettive „. È da notare che le primitive denominazioni sono andate soggette, collo sviluppo della Dinamica, ad alcune modificazioni del loro significato.

Il più antico teorema di conservazione, quello " della conservazione della forza viva „, va assoggettato alla restrizione dell'esistenza del potenziale. La parola " conservazione „ si riferiva originariamente al fatto, rilevato da Galileo nel movimento dei gravi sui piani inclinati, e assunto per principio da Huyghens nel trattato *De Horologio Oscillatorio,* che l'aumento della forza viva di un grave si conserva lo stesso, quando la caduta verticale rimane la stessa. Un più ampio significato le fu poi conferito da Giovanni Bernoulli *(De vera notione virium vivarum).*

" Teorema della conservazione del movimento del centro di massa „ si chiamava altre volte quello che ora più comunemente si chiama " teorema del movimento del centro di massa „. La parola " conservazione „ si riferiva, in questo caso, alla interpretazione del teorema sotto la forma che il movimento del centro di massa si conserva lo stesso, concependovi applicate, ad ogni istante, le forze che, allo stesso istante, riescono applicate a tutti i punti del mobile (cfr. LAGRANGE, *Mécanique Analytique,* Part. II, Sec. I). Jacobi mantiene la stessa denominazione nelle *Vorlesungen über Dynamik,* e dà per ragione della parola conservazione, quella che il movimento del centro di massa di un sistema di punti vincolati, nelle ipotesi da lui stabilite pei vincoli, riesce rappresentato dalle stesse equazioni, come se non esistessero i vincoli supposti.

Invece " Teorema delle aree „ è spesso inteso per quello che noi, sempre sull'esempio di Kirchhoff, chiamiamo " Teorema della conservazione delle aree „. Notiamo che questo è il teorema più

particolarmente posto in evidenza, e che questa stessa denominazione, o altra consimile, che parimente include il termine " conservazione ", è pure spesso adoperata.

Ho poi creduto opportuno di sostituire il " sistema delle forze motrici effettive " al così detto " sistema delle forze d'inerzia ". Ciò che, per le formole, non importa che un mutamento di segno, ma evita una parola, che può indurre ad un equivoco, almeno col nostro concetto delle circostanze determinatrici del movimento.

Pag. 141, § 149. — S'intende che la posizione a cui si riferisce W_0 si deve supporre tale che, se Δ_0 ne indica la distanza dalla posizione di massimo, è

$$0 \leqq \Delta_0 < a \, .$$

Pag. 169, § 166. — Planetas omnes in se mutuo graves esse jam ante probavimus, ut et gravitatem in unumquemque seorsim spectatum esse reciproce ut quadratum distantiae locorum a centro planetae. Et inde consequens est gravitatem in omnes proportionalem esse materiae in iisdem.

. . . .

Cor. 1. — Oritur igitur et componitur gravitas in planetam totum ex gravitate in partes singulas. Cujus rei exempla habemus in attractionibus magneticis et electricis. Oritur enim attractio omnis in totum ex attractionibus in partes singulas. Res intelligetur in gravitate, concipiendo planetas plures minores in unum globum coire et planetam majorem componere. Nam vis totius ex viribus partium oriri debebit. Si quis objiciat quod corpora omnia, quae apud nos sunt, hac lege gravitare debebunt in se mutuo, cum tamem ejusmodi gravitas neutiquam sentiatur: respondeo quod gravitas in haec corpora, cum sit ad gravitatem in terram totam, longe minor est quam sentiri possit.

Cor. 2. — Gravitatio in singulas corporis particulas aequales est reciproce ut quadratum distantiae locorum a particulis. Patet per Corol. 3, Prop. LXXIV, Lib. I.

(NEWTON, *Phil. Nat. Princ. Math.* Lib. III, Prop. VII).

L'accennata proposizione è il teorema sull'attrazione di una sfera a strati omogenei, conforme all'indicata legge elementare (cfr. § 172).

Pag. 191. — Sotto un altro punto di vista, si distinguono i vincoli in indipendenti e dipendenti dal tempo, secondo che le posizioni, o gli atti di movimento, conformi al vincolo, sono gli stessi oppur no, per qualunque istante dell'intervallo di tempo assegnato al movimento del mobile. Un corpo rigido con un punto fisso, o, invece, con un punto di cui è prescritto il movimento, sono esempii di queste due qualità di vincoli. Avvertiamo, per evitare equivoci, che il parametro invocato, col significato di tempo, alla pagina indicata, per distinguere i vincoli di 1.ª e di 2.ª specie, va considerato come una variabile ausiliare, indipendente dal tempo assegnato al movimento del mobile. E notiamo ancora che, per definire il secondo dei suddetti vincoli, non è necessario coordinare ad una successione di valori di questo parametro le posizioni del mobile. Poichè, per ogni valore del tempo assegnato al movimento del mobile, risultano conformi al vincolo tutte le posizioni del mobile, per le quali il punto di cui è prescritto il movimento possiede la posizione competente a quell'istante, senza nessuna particolare coordinazione delle posizioni medesime. Questo è dunque un vincolo dipendente dal tempo, per una classificazione, e di 1.ª specie, per l'altra.

INDICE DELLE MATERIE

Capitolo I.

Concetti fondamentali.

Capitolo II.

Teoremi generali della Dinamica.

Capitolo III.

Calcolo del movimento per gravitazione.

APPENDICE.

I.

Nozioni fondamentali sul Calcolo del Movimento dei Corpi Naturali.

II.

Nozioni di Calcolo Vettoriale.

III.

INDICE ALFABETICO DELLE DEFINIZIONI

A.

B.

C.

D.

E.

F.

G.

I.

L.

M.

O.

P.

CORREZIONI

Pag.	8	*linea*	13	*invece di*	misura	*leggi:*	unità di misura
»	43	»	13	»	$\overline{\mathbf{V}}$	»	$\overline{\mathbf{V}}_S$
»	48	»	2	»	$P-P_O$	»	$\overline{P}-\overline{P}_O$
»	61	»	ultima	»	F	»	$\mathbf{F}$
»	62	»	2	»	$\overline{k}$ e $\mathbf{F}^*$	»	$\overline{k}$ e $\overline{\mathbf{F}}^*$
»	72	»	21	»	V_R	»	$\mathbf{V}_R$
»	76	»	7	*invece di*	misura dell'area		
				leggi:	misura del doppio dell'area		
»	103	»	15	*invece di*	F^*	*leggi:*	$\mathbf{F}^*$
»	105	»	13	»	$\mathbf{M}^*$	»	$\mathbf{M}^*_O$
»	106	»	8	»	$\mathbf{M}^*$	»	$\mathbf{M}^*_O$
»	108	»	15	»	F^*	»	$\mathbf{F}^*$
»	123	»	21	»	$\overline{\mathbf{V}}\times\overline{\mathbf{F}}^*$	»	$\mathbf{V}\times\mathbf{F}^*$
»	124	»	22-23	»	assumendo l'asse delle *z* colla direzione dell'asse di rotazione		
				leggi:	formando l'asse delle *z* coll'asse di rotazione		
»	178	»	22-23	»	Cavendisch	»	Cavendish
»	179	»	12	»	6366	»	6371
»	191	»	5	»	l'equazione intrinseca del movimento (§§ 15, 16)		
				leggi:	l'equazione della conservazione della massa (§ 38)		
»	213	»	9-10	*invece di*	definito per mezzo dei punti P_1, P_2, colla convenzione		
				leggi:	definito per mezzo dei punti P_1, P_2, con questo che la grandezza e la direzione sono quelle del segmento rettilineo P_1P_2, e colla convenzione		